

Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Relatório de estágio do Mestrado em Ciências Actuarias

Modelos Estocásticos

em

Provisões para Sinistros

Ana Isabel Victor de Carvalho

Orientação: Mestre Jeferino Manuel dos Santos

Professora de acompanhamento: Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

Júri:

Presidente: Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

Vogais: Doutor João Manuel de Sousa Andrade e Silva

Doutor Onofre Alves Simões

Mestre Jeferino Manuel dos Santos

Abril 2010

TERMOS DO ESTÁGIO

Faculdade:

Instituto Superior de Economia e Gestão – Universidade Técnica de Lisboa

Mestrado:

Mestrado em Ciências Actuarias

Aluno:

Ana Isabel Victor de Carvalho

Professora de acompanhamento:

Doutora Maria de Lourdes Caraças Centeno

Empresa:

Companhia de Seguros, Allianz Portugal, S.A.

Orientador:

Mestre Jeferino Manuel dos Santos

Período do Estágio:

Fevereiro a Julho de 2009

Local de Estágio:

Rua Andrade Corvo, n.º 32, em Lisboa

Departamento onde se realizou o estágio:

Departamento de Vida e Actuariado

Tema do Estágio:

Modelos estocásticos em provisões para sinistros

RESUMO

No sector segurador as provisões para sinistros têm extrema importância. Assegurar que estas reflectem as responsabilidades da companhia é tarefa árdua, sobretudo pela escassez e qualidade dos dados disponíveis.

O presente trabalho tem como objectivo principal abordar metodologias utilizadas para obter a melhor estimativa das reservas e respectiva variabilidade com um elevado grau de confiança. Será dada especial atenção a conjuntos de dados que apresentem bastantes sinistros por encerrar à data da análise, assim como, quando estamos perante a quebra de estrutura dos dados. Para tal, são utilizados modelos estocásticos, nomeadamente o Modelo de Mack, os modelos lineares generalizados e os modelos bayesianos, conjuntamente com as técnicas de reamostragem de *bootstrap* e Markov chain Monte Carlo, esta sob a forma do algoritmo de Gibbs.

A utilização do parâmetro de escala variável, o cálculo do erro de previsão quando é modelada a cauda e a escolha das *priors*, como forma de incorporação da opinião do actuário, são também alvo do trabalho desenvolvido.

Palavras-chave: Provisões para sinistros, modelos estocásticos, *bootstrap*, Markov chain Monte Carlo, cauda, erro de previsão, opinião do actuário.

ABSTRACT

In the insurance business, loss reserving is of the most importance. To guarantee that the estimation of adequate reserves is done in a way that reflects the insurer's liabilities is a hard goal to achieve, mainly because of scarce available data and also data quality.

The present study has as main goal to present methods to obtain the best estimate for loss reserving as well as estimating its variability with high certainty level.

Special attention will be given to long-tail line of business and data breaking structure. To accomplish this it will be used stochastic models, namely Mack's model, models in a generalized linear model context as well as models in a Bayesian framework, together with bootstrap simulation method and Markov chain Monte Carlo, under the Gibbs sampler.

The use of the dispersion parameter, the prediction error when a tail factor is used and the choice of the priors distribution, as a way of incorporating the expert opinion, will be another aim of this study.

Keywords: Loss reserving, stochastic models, bootstrap, Markov chain Monte Carlo, tail factor, prediction error, expert opinion.

ÍNDICE

AGRADECIMENTOS	10
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	11
CAPÍTULO 2 – MODELOS ESTOCÁSTICOS	15
2.1. CONCEITOS E NOTAÇÃO	15
2.2. MODELOS DETERMINÍSTICOS VERSUS MODELOS ESTOCÁSTICOS	18
2.3. MODELO DE MACK	20
2.4. MODELOS NO CONTEXTO DOS MODELOS LINEARES GENERALIZADOS	21
2.4.1. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON	23
2.4.1.1. PARAMETRIZAÇÃO	23
2.4.1.2. RESÍDUOS	25
2.4.1.3. PARÂMETRO DE ESCALA	27
2.4.2. ERRO DE PREVISÃO	28
2.5. MODELOS NUM CONTEXTO BAYESIANO	31
2.5.1. MODELO BINOMIAL NEGATIVA	32
2.5.2. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON	35
2.5.3. MODELO LOG-NORMAL DE TRÊS PARÂMETROS	37
2.6. TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO PARA O CÁLCULO DAS RESERVAS	40
2.6.1. BOOTSTRAP	41
2.6.2. MARKOV CHAIN MONTE CARLO	43
2.6.2.1. INTEGRAÇÃO DE MONTE CARLO	44
2.6.2.2. AMOSTRAGEM DE GIBBS	45
CAPÍTULO 3 – APRESENTAÇÃO DOS DADOS, MELHOR ESTIMATIVA E MODELOS APLICADOS	48
3.1. RAMO DE NEGÓCIO 1	49
3.2. RAMO DE NEGÓCIO 2	53
3.3. RAMO DE NEGÓCIO 3	57
CAPÍTULO 4 – APLICAÇÃO DOS MODELOS A CADA UM DOS RAMOS DE NEGÓCIO	60
4.1. AVALIAÇÃO DOS MODELOS	60
4.1.1. MODELOS LINEARES GENERALIZADOS	60
4.1.2. MODELOS BAYESIANOS	61
4.2. APLICAÇÃO	63
4.2.1. RAMO DE NEGÓCIO 1	63
4.2.1.1. MODELO COM FACTOR DE CAUDA	63
4.2.1.2. MODELO COM PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL	71
4.2.1.3. MODELO COM FACTOR DE CAUDA E PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL	75

4.2.1.4. MODELO QUE INCORPORA INFORMAÇÃO EXTERNA NOS FACTORES DE DESENVOLVIMENTO	78
4.2.1.5. CONCLUSÃO PARA O RAMO DE NEGÓCIO 1	81
4.2.2. RAMO DE NEGÓCIO 2	82
4.2.2.1. CONCLUSÃO PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2	90
4.2.3. RAMO DE NEGÓCIO 3	91
4.2.3.1. CONCLUSÃO PARA O RAMO DE NEGÓCIO 3	94
4.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO	100
ANEXO	102
A.1. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO) LOB1 – CÓDIGO WINBUGS	102
A.2. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO) LOB2 – CÓDIGO WINBUGS	104
A.3. MODELO BINOMIAL NEGATIVA (BAYESIANO) LOB1 – CÓDIGO WINBUGS	107
A.4. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO) LOB2, 6 ANOS – – CÓDIGO WINBUGS	112
A.5. MODELO LOG-NORMAL (BAYESIANO) LOB3 – CÓDIGO WINBUGS	114
A.6. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (MLG) – MODELO 1 – CÓDIGO R	116
BIBLIOGRAFIA	142

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – TRIÂNGULO DOS MONTANTES INCREMENTAIS	16
TABELA 2.2 – COMPARAÇÃO DAS TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO NA OBTENÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DAS RESERVAS	40
TABELA 3.1 – MONTANTES INCREMENTAIS, PRÉMIO DE RISCO E FACTORES DE DESENVOLVIMENTO DE CHAIN LADDER DO RAMO DE NEGÓCIO 1	49
TABELA 3.2 – FACTORES DE DESENVOLVIMENTO ESCOLHIDOS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 1	50
TABELA 3.3 – FACTORES DE DESENVOLVIMENTO ESCOLHIDOS PARA OS MONTANTE PAGOS PARA UM PERÍODO DE VINTE ANOS (RAMO DE NEGÓCIO 1)	51
TABELA 3.4 – MELHOR ESTIMATIVA PARA O MONTANTE DE SINISTROS PAGOS POR PERÍODO DE DESENVOLVIMENTO (RAMO DE NEGÓCIO 1)	52
TABELA 3.5 – MONTANTES INCREMENTAIS, PRÉMIO DE RISCO E FACTORES DE DESENVOLVIMENTO DE CHAIN LADDER DO RAMO DE NEGÓCIO 2	53
TABELA 3.6 – FACTORES DE DESENVOLVIMENTO ESCOLHIDOS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2	54
TABELA 3.7 – MELHOR ESTIMATIVA PARA O MONTANTE DE SINISTROS PAGOS POR PERÍODO DE DESENVOLVIMENTO (RAMO DE NEGÓCIO 2)	55
TABELA 3.8 – MONTANTES INCREMENTAIS E PRÉMIO DE RISCO DO RAMO DE NEGÓCIO 2 PARA SINISTROS NO MÁXIMO COM SEIS ANOS	56
TABELA 3.9 – MONTANTES INCREMENTAIS DO RAMO DE NEGÓCIO 2 SOB A FORMA DE TRAPÉZIO	56
TABELA 3.10 – MONTANTES INCREMENTAIS E PRÉMIO DE RISCO DO RAMO DE NEGÓCIO 3	57
TABELA 3.11 – FACTORES DE DESENVOLVIMENTO ESCOLHIDOS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 3	58
TABELA 3.12 – MELHOR ESTIMATIVA PARA O MONTANTE DE SINISTROS PAGOS POR PERÍODO DE DESENVOLVIMENTO (RAMO DE NEGÓCIO 3)	59
TABELA 4.1 – COMPARAÇÃO DOS FACTORES DE DESENVOLVIMENTO PARA CADA UMA DAS FUNÇÕES UTILIZADAS	64
TABELA 4.2 – RESERVAS E PROVISÕES PARA SINISTROS DOS MODELOS COM CAUDA	71
TABELA 4.3 – VALORES PARA O PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL	73

TABELA 4.4 – APLICAÇÃO DO PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL AOS DADOS	74
TABELA 4.5 – RESERVAS E PROVISÕES PARA SINISTROS DOS MODELOS COM CAUDA E PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL	78
TABELA 4.6 – MONTANTE DAS RESERVAS E RESPECTIVO INTERVALO DE CONFIANÇA COM ALTERAÇÃO DE POLÍTICA NOS ÚLTIMOS SEIS ANOS	79
TABELA 4.7 – RESERVAS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 1	82
TABELA 4.8 – RESERVAS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2 E ERRO DE PREVISÃO ASSOCIADO COM O MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (MLG) – MODELO 1 E COM BORNHUETTER-FERGUSON	83
TABELA 4.9 – RESERVAS SIMULADAS COM A TÉCNICA DE BOOTSTRAP	84
TABELA 4.10 – COMPARAÇÃO DAS PROVISÕES PARA SINISTROS UTILIZANDO VÁRIAS MEDIDAS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2	84
TABELA 4.11 – RESERVAS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2 E ERRO DE PREVISÃO ASSOCIADO COM O MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO)	85
TABELA 4.12 – PROVISÕES PARA SINISTROS DO MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2 COM OS DADOS SOB A FORMA DE TRAPÉZIO	87
TABELA 4.13 – RESERVAS E ERRO DE PREVISÃO PARA O MODELO DE MACK NO RAMO DE NEGÓCIO 2, SOB VÁRIOS CENÁRIOS	89
TABELA 4.14 – MONTANTE TOTAL PARA SINISTROS MODELO DE MACK COM SIMULAÇÃO (RAMO DE NEGÓCIO 2)	90
TABELA 4.15 – MONTANTE TOTAL PARA SINISTROS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2	91
TABELA 4.16 – ESTIMATIVA DO MODELO DE MACK PARA O RAMO DE NEGÓCIO 3	94
TABELA 4.17 – MONTANTE TOTAL PARA SINISTROS MODELO DE MACK COM SIMULAÇÃO (RAMO DE NEGÓCIO 3)	95
TABELA 4.18 – MONTANTE TOTAL PARA SINISTROS PARA O RAMO DE NEGÓCIO 3	96

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 4.1 – MODELAÇÃO DOS FACTORES DE DESENVOLVIMENTO PARA A CAUDA	65
FIGURA 4.2 – ANÁLISE DOS RESÍDUOS PADRONIZADOS DO MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON	66
FIGURA 4.3 – HISTOGRAMA E DENSIDADE EMPÍRICA DOS FACTORES DE CAUDA PARA DIFERENTES	67
FIGURA 4.4 – FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO EMPÍRICA E HISTOGRAMA DAS RESERVAS TOTAIS BOOTSTRAP	67
FIGURA 4.5 – FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO EMPÍRICA ACUMULADA E Q-Q PLOT DAS RESERVAS TOTAIS	68
FIGURA 4.6 – ANÁLISE DOS RESÍDUOS PADRONIZADOS DO MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON COM PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL	75
FIGURA 4.7 – HISTOGRAMA E DENSIDADE EMPÍRICA DOS FACTORES DE CAUDA PARA DIFERENTES PERÍODOS DE DESENVOLVIMENTO	76
FIGURA 4.8 – HISTOGRAMA DAS RESERVAS TOTAIS BOOTSTRAP	76
FIGURA 4.9 – FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA EMPÍRICA E Q-Q PLOT DAS RESERVAS TOTAIS	77
FIGURA 4.10 – DISTRIBUIÇÃO A POSTERIORI DO MONTANTE TOTAL DAS RESERVAS	80
FIGURA 4.11 – BOXPLOT DAS RESERVAS POR ANO DE ACIDENTE	80
FIGURA 4.12 – BOXPLOT DAS RESERVAS POR ANO DE ACIDENTE PARA O MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON NO CONTEXTO DOS MLG PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2	86
FIGURA 4.13 – DISTRIBUIÇÃO DAS RESERVAS TOTAIS NO MODELO NO CONTEXTO BAYESIANO	87

AGRADECIMENTOS

À Prof.^a Doutora Maria de Lourdes Centeno, pela sua disponibilidade em ensinar, acompanhar e orientar durante todo o decorrer do mestrado.

Ao Dr. Jeferino Santos, pelas sugestões de temas e de questões que careciam de um estudo mais profundo e pelo acompanhamento durante o estágio.

Aos professores Doutor Alfredo Duarte Egídio dos Reis e Doutor Jorge Manuel Afonso Garcia, pela aposta que fizeram no meu empenho e capacidades.

À Allianz Portugal, na pessoa da Dr.^a Teresa Brantuas, pela oportunidade que me concedeu em integrar a equipa de actuariado.

A todos os meus colegas da Allianz Portugal, pela forma como me acolheram e apoiaram durante o estágio.

Aos meus colegas de mestrado, pela preciosa interajuda e companheirismo.

À minha família, por todo o apoio, disponibilidade, incentivo e confiança neste projecto.

Aos amigos que estiveram sempre disponíveis.

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

O texto apresentado é reflexo do estágio realizado, no âmbito do Mestrado em Ciências Actuarias, na companhia de seguros Allianz Portugal. O estágio teve início a 2 de Fevereiro de 2009 e término seis meses depois, a 31 de Julho de 2009, com horário laboral completo. O primeiro dia na seguradora foi dedicado ao acolhimento e formação de um grupo de quatro estagiários, no qual eu me incluía. A formação consistiu na apresentação da Allianz Portugal – história, objectivos, valores, produtos, política, etc. – assim como do Grupo Allianz e em informações gerais sobre a actividade seguradora. No dia seguinte fui apresentada, pelo meu orientador, aos colegas do departamento de Actuariado e de outros dois departamentos que se encontravam a partilhar o espaço de trabalho do n.º 32 da rua Andrade Corvo em Lisboa. Durante estes seis meses, para além de desenvolver o trabalho de estágio, procurei participar nas actividades da empresa – infelizmente não consegui reunir colegas em número suficiente para formar uma equipa para um convívio que a Allianz Portugal organiza anualmente. No mês de Abril, com os colegas do Actuariado, fiz a mudança para o piso onde já se encontrava a Gestão de Produto Vida a qual também faz parte da Direcção de Vida e Actuariado sob a direcção da actuária responsável Dr.ª Teresa Brantuas. Durante o estágio tive ainda a oportunidade de atender ao pedido que me foi feito para dar apoio, durante um dia, aos colegas da Gestão de Produto Vida, visto que não iria comprometer a concretização do trabalho que estava a desenvolver.

Neste estágio, propus-me estudar modelos estocásticos em provisões para

sinistros. Iniciei o trabalho com a revisão de modelos determinísticos, passando depois ao estudo dos modelos estocásticos, tanto no quadro dos modelos lineares generalizados (MLG) como no contexto bayesiano. No final de cada fase do estudo apliquei os modelos trabalhados ao cálculo das reservas da empresa através da construção e implementação de rotinas em *software* estatístico de distribuição gratuita – o R¹ (versão 2.9.0) e o OpenBUGS² (versão 3.0.3) – e da folha de cálculo.

Tive oportunidade de conhecer o *software* que a empresa dispõe para o cálculo das provisões; este é bastante completo e que tem por base os MLG. Com este programa é possível a aplicação da técnica de *bootstrap* aos modelos de Mack e de sobredispersão de Poisson com parâmetro de escala fixo ou variável; também é possível incluir um factor de cauda nos modelos e escolher entre várias curvas no ajustamento dos factores de desenvolvimento. O programa ainda contempla a possibilidade de escolha da distribuição para o erro do processo entre a distribuição Normal, Poisson e Gama. Este *software* apresenta ainda outras funcionalidade que, para o trabalho que desenvolvi, não se apresentaram relevantes.

Assim, com o objectivo de estudar reservas estocásticas no contexto dos MLG, trabalhei diversos artigos que serão referidos ao longo do presente texto; de entre estes realço a Tese de Mestrado de Muratori (2007), por se encontrar

1 É um *software* vocacionado para computação estatística tanto de algoritmos como gráfica e de distribuição gratuita. Poderá ser descarregado em <http://www.r-project.org/>

2 Versão *open-source* do *core* do código BUGS (Bayesian inference Using Gibbs Sampling) para o Windows® do *software* BUGS. O sítio do projecto é <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>

escrita em língua portuguesa e apresentar código de implementação do Modelo de sobredispersão de Poisson; conjuntamente tive à disposição diversas folhas de cálculo enquadradas nos MLG desenvolvidas a partir dos trabalhos de England e Verrall. Baseada em todo este material e nas rotinas que desenvolvi procurei, comparativamente à tese acima referida, uma maior maleabilidade relativamente à dimensão dos dados, a possibilidade de ponderar os factores de desenvolvimento incrementais, a inclusão de factor de cauda no modelo e a possibilidade de escolha de entre várias curvas no ajustamento dos factores de desenvolvimento do modelo. Com base em alguns dos *outputs* que pude observar no *software* da empresa e de acordo com as necessidades de análise, elaborei um conjunto de gráficos que vêm apoiar os resultados numéricos obtidos no programa.

Relativamente aos modelos estocásticos na provisão para sinistros num contexto bayesiano, estudei vários modelos presentes na bibliografia académica, nomeadamente nos trabalhos de Verrall e England (2005) e de Alba (2006). Estes foram implementados – baseada no código originalmente disponível nos artigos consultados – de acordo com os dados e as abordagens consideradas.

Na bibliografia a que tive acesso não encontrei trabalhos com modelos estocásticos que incluíssem cauda e parâmetro de escala variável e respectiva medida de erro; assim, procurei desenvolver este aspecto no trabalho que realizei.

Neste relatório começo por apresentar, de forma breve, no Capítulo 2 os

modelos estocásticos utilizados, as técnicas de simulação, o parâmetro de escala variável e os modelos para a cauda. A análise do comportamento dos dados relativos a três ramos Não Vida, nomeadamente um ramo de negócio cuja natureza obriga à existência de cauda, será apresentada no Capítulo 3, conjuntamente com a minha escolha para a melhor estimativa. No Capítulo 4, será estudado o processo de escolha do modelo que melhor reflecta o comportamento dos dados – através da incorporação da opinião do actuário –, o montante de reservas para cada um dos ramos de negócio e considerações sobre cada um dos modelos. O Capítulo 5 apresenta conclusões finais sobre o estágio realizado. No anexo encontram-se os códigos utilizados nos modelos aplicados; o modelo de Mack, visto estar implementado numa folha de cálculo, apenas se encontra no CD anexo ao relatório.

CAPÍTULO 2 – MODELOS ESTOCÁSTICOS

Neste capítulo, faz-se uma descrição de alguns dos modelos estocásticos utilizados na modelação das reservas, não se procedendo à revisão de toda a literatura publicada sobre os mesmos. Para um estudo aprofundado sobre outros modelos e aplicação de técnicas de simulação, os trabalhos de England e Verrall (2002) e (2006), deverão ser tomados como referência.

Desta forma inicia-se este texto com alguns conceitos e notação base, seguindo-se uma abordagem ao modelo estocástico proposto por Mack (1993), um modelo no contexto dos modelos lineares generalizados (MLG) e três com base na teoria bayesiana.

2.1. CONCEITOS E NOTAÇÃO

Considera-se que se tem disponível um conjunto de dados anuais. Os modelos que serão expostos podem ser aplicados a outros períodos, nomeadamente quadrimestral.

Neste texto utilizar-se-á apenas montantes de sinistros, mas muitos dos modelos poderão ser aplicados, por exemplo, ao número de sinistros ou a qualquer outro tipo de dados.

Sendo, sem perda de generalidade, C_{ik} o montante incremental relativo ao ano de acidente i e período de desenvolvimento k e N o ano até ao qual existe informação disponível, então, o conjunto dos dados a considerar é

$\{C_{ik}: i=1,2,\dots,N, k=1,2,\dots,N-i+1\}$. Tome-se o conjunto de dados agrupado sob a forma de triângulo:

Tabela 2.1 – Triângulo dos montantes incrementais

Ano de acidente	período de desenvolvimento						
	1	2	...	k	...	$N-1$	N
1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1k}	...	$C_{1\ N-1}$	$C_{1\ N}$
2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2k}	...	$C_{2\ N-1}$	
...			
i	C_{i1}	C_{i2}	...	C_{ik}			
...					
$N-1$	$C_{N-1\ 1}$	$C_{N-1\ 2}$					
N	C_{N1}						

Denota-se por D_{ik} os montantes acumulados no ano de acidente i e

reportados até ao período de desenvolvimento k , de modo a ter $D_{ik} = \sum_{t=1}^k C_{it}$.

O objectivo é preencher a zona inferior do triângulo, isto é, prever os valores

\hat{C}_{ik} , com $i=1,2,\dots,N$ e $k=N-i+2, N-i+3, \dots, N$ de modo a obter os totais

de linha \hat{D}_{iN} . Com estes montantes determina-se as reservas do ano i , para

$i=2,\dots,N$, através do cálculo $R_i = \hat{D}_{iN} - D_{i\ N-i+1}$, ou de forma equivalente

$$R_i = \sum_{t=N-i+2}^N \hat{C}_{it}, \text{ e o total de reservas por } R = \sum_{i=2}^N R_i.$$

Por uma questão de uniformização de notação descreve-se sucintamente a técnica de *chain ladder*, que permite obter uma previsão pontual das reservas do seguinte modo:

- determina-se os factores de desenvolvimento:

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N-k+1} D_{ik}}{\sum_{i=1}^{N-k+1} D_{ik-1}}, \quad k=2, \dots, N;$$

- aplica-se os factores de desenvolvimento aos montantes acumulados:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{iN-i+2} &= D_{iN-i+1} \hat{\lambda}_{N-i+2} \\ \hat{D}_{ik} &= \hat{D}_{ik-1} \hat{\lambda}_k, \quad k=N-i+3, N-i+4, \dots, N \end{aligned}$$

escrito de outra forma $\hat{D}_{ik} = \hat{D}_{ik-1} \hat{\lambda}_k$ com $\hat{D}_{iN+1-i} = D_{iN+1-i}$, ou,

recursivamente, através de $\hat{D}_{iN} = D_{iN+1-i} \hat{\lambda}_{N+2-i} \dots \hat{\lambda}_N$;

- determina-se os montantes incrementais por diferenciação:

$$\hat{C}_{ik} = \hat{D}_{ik} - \hat{D}_{ik-1}, \quad k=N-i+2, \dots, N \text{ e } \hat{D}_{iN+1-i} = D_{iN+1-i}.$$

É de referir que este modelo pode ser estendido à previsão para além do período de desenvolvimento N , criando desta forma uma cauda. Para tal, basta escolher factores de desenvolvimento λ_{N^*} com $N^* > N$, sendo os montantes acumulados calculados de forma análoga à técnica de *chain ladder* $\hat{D}_{iN^*} = \lambda_{N^*} \hat{D}_{iN}$. A escolha dos factores de desenvolvimento poderá ser feita de inúmeras formas, recorrendo o actuário à sua opinião crítica e a modelos mais ou menos complexos para o efeito. No Capítulo 3 apresenta-se os modelos utilizados neste trabalho para a modelação da cauda.

Um outro método determinístico, aqui utilizado, é o de Bornhuetter-Ferguson. Este consiste em estimar as reservas do seguinte modo:

- obtém-se uma estimativa inicial, M_i , do montante total para sinistros para cada ano de acidente – em geral utiliza-se informação

- complementar aos dados, como o prémio de risco;
- estima-se a proporção deste montante que emergirá em cada ano de acidente – em geral, utiliza-se os factores de desenvolvimento de *chain ladder* para este passo;
 - aplica-se a proporção anterior à estimativa inicial, sendo as reservas do ano i dadas por:

$$R_i^{(BF)} = M_i \left(1 - \frac{1}{\lambda_{N-i+2} \lambda_{N-i+3} \dots \lambda_N} \right) = M_i \frac{1}{\underbrace{\lambda_{N-i+2} \lambda_{N-i+3} \dots \lambda_N}_{\Leftrightarrow D_{i,N-i+1} \text{ de chain ladder}}} (\lambda_{N-i+2} \lambda_{N-i+3} \dots \lambda_N - 1).$$

No texto que se segue os montantes incrementais observados serão referidos como observações ou dados. Note-se que estes por vezes poderão apresentar valores negativos.

2.2. MODELOS DETERMINÍSTICOS VERSUS MODELOS ESTOCÁSTICOS

Quando se utilizam modelos determinísticos no cálculo das reservas, como é exemplo o algoritmo de *chain ladder*, está-se a calcular apenas uma estimativa para esse montante. Estes modelos não permitem associar um erro às previsões feitas. Muitas vezes as provisões da companhia, para determinado ramo de negócio, passavam por considerar a estimativa para a reserva mais uma margem de risco, margem essa talvez calculada como percentagem da reserva.

Apesar de este trabalho não ter como objectivo aprofundar as técnicas determinísticas para o cálculo das reservas, o algoritmo de *chain ladder* será tomado como referência. Este está bastante difundido no mercado e, para além do mais, numa primeira abordagem, a maior parte dos modelos estocásticos aqui apresentados tomam como ponto de referência os montantes das reservas obtidos por esta técnica.

Ao abordar-se o cálculo das reservas considerando que os montantes incrementais observados são realizações de uma variável aleatória com determinada distribuição, já se está a trabalhar dentro dos modelos estocásticos. Partindo desta concepção do problema, o objectivo é especificar a distribuição para cada uma das variáveis aleatórias. Os modelos estocásticos estão muito para além do cálculo da melhor estimativa, permitem ao decisor ter mais informação sobre as reservas, quer sob a forma do erro associado à previsão quer através da sua distribuição.

Como exemplos de modelos estocásticos encontra-se o modelo proposto por Mack (1993) – Modelo de Mack –, onde a cada montante de reserva se associa o erro de previsão sem fazer suposições acerca da distribuição; mais tarde, em Mack (1999), o autor acrescenta o factor de cauda ao modelo. Para além deste, existem os modelos estocásticos enquadrados nos MLG, nos quais se especifica a distribuição para as variáveis aleatórias, obtendo assim a melhor estimativa para as reservas, através do valor esperado, e o erro de previsão, através da função variância e da matriz das covariâncias dos estimadores. Finalmente, temos os modelos que recorrem à teoria bayesiana – modelos

bayesianos –, onde, com base nas observações, na escolha da distribuição das mesmas e no conhecimento que se possa ter sobre os parâmetros, se obtém a distribuição para as reservas.

Completando o Modelo de Mack ou os MLG com a técnica de simulação de *bootstrap*, ou utilizando os modelos bayesianos, obtém-se a distribuição das reservas por ano de acidente e a distribuição da reserva total. Ora, este facto é muito relevante, visto ser possível, para além da melhor estimativa (métodos determinísticos) e do erro de previsão (modelos de Mack e MLG), ter a distribuição das reservas e, com isso, o enviesamento, os percentis, a probabilidade de ruína, o *value at risk*, etc.

2.3. MODELO DE MACK

Mack (1993) propõe um modelo que surgiu com o objectivo de colmatar a falta de um método para calcular o erro de previsão das reservas dadas pelo algoritmo de *chain ladder*. Para tal, especifica somente os dois primeiros momentos para os montantes acumulados, como se pode ver esquematizado no modelo que a seguir se apresenta.

MODELO DE MACK

- $E(D_{ik}|D_{i1}, \dots, D_{ik-1}) = D_{ik-1} \lambda_k$, $i=1, \dots, N$ e $k=2, \dots, N$, com os parâmetros $\lambda_2, \dots, \lambda_N$ estimados pelos factores de desenvolvimento de *chain ladder*;
- as variáveis (D_{i1}, \dots, D_{iN}) , $1 \leq i \leq N$ são independentes, ou seja, não existe dependência entre anos de acidente;
- $Var(D_{ik}|D_{i1}, \dots, D_{ik-1}) = D_{ik-1} \sigma_k^2$, $i=1, \dots, N$ e $k=2, \dots, N$ com os estimadores de σ_k^2 dados por $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k+1} D_{ik-1} \left(\frac{D_{ik}}{D_{ik-1}} - \hat{\lambda}_k \right)^2$.

Sob estas condições prova que o erro de previsão das reservas anuais é dado por:

$$\widehat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{D}_{iN} \sum_{k=N-i+1}^{N-1} \frac{\hat{\sigma}_{k+1}^2}{\hat{\lambda}_{k+1}^2} \left(\frac{1}{\hat{D}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{N-k} D_{jk}} \right), \quad i=2, \dots, N.$$

Posteriormente, Mack (1999) generaliza este modelo de modo a considerar o cálculo recursivo para o erro de previsão, os factores de desenvolvimento calculados como a média dos factores de desenvolvimento incrementais, a possibilidade de dar diferentes pesos aos factores de desenvolvimento individuais e a inclusão de cauda com o cálculo do respectivo erro de previsão.

2.4. MODELOS NO CONTEXTO DOS MODELOS LINEARES GENERALIZADOS

Uma outra forma de construir modelos para as reservas é ter por base a estrutura dos MLG. Repare-se que se está a considerar que cada uma das entradas do triângulo representa uma observação de uma variável aleatória,

pelo que a ideia é modelar o valor esperado da variável aleatória tendo como variáveis explicativas o ano de acidente e o período de desenvolvimento.

Desta forma, começa-se por especificar a distribuição para os dados, distribuição essa que tem de pertencer à família exponencial de dispersão. Nas situações em que há necessidade de introduzir um parâmetro de sobredispersão, de modo a acomodar a variabilidade dos dados, só se especifica os dois primeiros momentos da distribuição – o valor médio e a variância –, sendo os parâmetros estimados pela máxima quasi-verossimilhança [veja-se Turkman e Silva (2000)]. Neste último caso será necessário impor algumas restrições aos modelos – este aspecto será abordado mais à frente.

Antes de se especificar o modelo utilizado neste trabalho, refiram-se dois pontos importantes: (1) há modelos com base nos MLG que, quando correctamente parametrizados, reproduzem as reservas dadas pelo método de *chain ladder*; (2) é possível construir um modelo, também com base nos MLG, em que se obtêm os mesmos estimadores do Modelo de Mack, bastando para tal considerar que os montantes acumulados seguem uma distribuição normal e utilizar a função *link* logarítmica – este trabalho poderá ser consultado em England e Verrall (2002).

A estrutura dos MLG utilizada no modelo para as reservas é a seguinte:

- sejam C_{ik} variáveis aleatórias independentes com função densidade de probabilidade, $f(\cdot)$, pertencente à família exponencial de dispersão de tal modo que $C_{ik} \sim f(c; \mu_{ik}, \phi)$;

- $E[C_{ik}] = \mu_{ik}$ e $Var[C_{ik}] = \frac{\phi V(\mu_{ik})}{\omega_{ik}}$, onde $V(\cdot)$ é a função variância (uma função da média), ϕ o parâmetro de escala e ω_{ik} os pesos;
- a estrutura para a média é dada pela função *link* $g(\cdot)$ através da relação $g(\mu_{ik}) = \eta_{ik}$;
- a estrutura linear para o preditor: $\eta_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_k$, com $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, de modo a evitar a sobreparametrização; esta estrutura permite considerar o modelo que tem por base a distribuição Poisson, entre outros.

2.4.1. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON

O Modelo de sobredispersão de Poisson tem a estrutura apresentada anteriormente: supõe-se que as variáveis aleatórias C_{ik} são independentes com distribuição de sobredispersão de Poisson, que a função variância é igual à média, que o parâmetro de escala é maior que um, uma estrutura aditiva para o preditor e função *link* logarítmica.

2.4.1.1. PARAMETRIZAÇÃO

O modelo resume-se da seguinte forma:

MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (MLG) – MODELO 1

- $E[C_{ik}] = \mu_{ik}$;
- $Var[C_{ik}] = \phi V(\mu_{ik})$ com $V(\mu_{ik}) = \mu_{ik}$ e $\phi > 1$ estimado a partir dos dados;
- $g(\mu_{ik}) = \ln(\mu_{ik})$ e portanto $\eta_{ik} = \ln(\mu_{ik}) \Rightarrow \mu_{ik} = e^{\eta_{ik}} = e^{\mu + \alpha_i + \beta_k}$.

Uma outra parametrização possível é utilizar a função *link* identidade e o preditor com uma estrutura multiplicativa, como apresentado por England e Verrall (2002). Tem-se assim o modelo:

MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (MLG) – MODELO 2

$$\begin{aligned} - & E[C_{ik}] = a_i b_k; \\ - & Var[C_{ik}] = \phi a_i b_k, \text{ com } \sum_{k=1}^N b_k = 1. \end{aligned}$$

Esta parametrização tem a vantagem de tornar mais fácil interpretar os parâmetros de linha e de coluna: a_i é o valor esperado do total do montante de sinistros no ano i ; e b_k representa a proporção deste a emergir no período de desenvolvimento k .

Através desta parametrização percebe-se melhor a restrição do Modelo de sobredispersão de Poisson: a soma dos montantes (incrementais) em cada uma das colunas tem de ser positiva. Vejamos, a variância tem de ser positiva, desta forma os b_k têm de ser positivos (já que os a_i o são sempre), ou seja, a proporção do total do montante de sinistros a emergir no período k tem de ser positiva, o que obriga a que a soma dos montantes incrementais da coluna k seja positiva.

Como a única restrição do modelo aos dados é a soma de cada uma das colunas ser positiva, é possível haver observações negativas no triângulo. Ora isso vem de encontro à realidade muitas vezes apresentada pelos dados, sendo essa uma das razões para a utilização do Modelo de sobredispersão de Poisson. Outra razão é obter-se os mesmos preditores das reservas que a técnica de *chain ladder*, Renshaw e Verrall (1998), indo desta forma ao

encontro do pretendido: obter o erro de previsão para as reservas de *chain ladder*.

Verificou-se que a suposição fundamental neste modelo é escrever a variância proporcional ao valor esperado (sendo a constante de proporcionalidade o parâmetro de escala) e, neste caso, não haver a obrigatoriedade de as variáveis aleatórias serem unicamente inteiros positivos – McCullagh e Nelder (1989) –, dada a utilização da quasi-verosimilhança.

Note-se ainda que a sobredispersão não afecta a estimação dos parâmetros, mas sim, de forma crescente, os seus desvios padrão. Ver Renshaw e Verrall (1998).

2.4.1.2. RESÍDUOS

Os resíduos vão ter um papel muito importante nos modelos baseados nos MLG. Para além de serem uma das formas de aferir o ajustamento do modelo, vão servir para obter o erro de previsão e a distribuição das reservas.

Dentro do contexto das reservas, é possível supor que as observações são independentes, no entanto, já não é tão imediato que elas sejam identicamente distribuídas, principalmente pelo facto de as suas médias dependerem das mesmas covariáveis. É aqui que se revela a importância dos resíduos: estes ou são independentes e identicamente distribuídos ou é possível fazer com que sejam. Poderão, assim, ser utilizados como dados para a técnica de reamostragem de *bootstrap*.

Neste trabalho utilizar-se-á os resíduos de Pearson – sobretudo por razões de

ordem prática – que, no caso do Modelo de sobredispersão de Poisson, tomam a forma:

$$r_{ik}^{(P)} = \frac{c_{ik} - \hat{\mu}_{ik}}{\sqrt{\text{Var}(C_{ik})}} = \frac{c_{ik} - \hat{\mu}_{ik}}{\sqrt{\hat{\phi} V(\mu_{ik})}} = \frac{c_{ik} - \hat{\mu}_{ik}}{\sqrt{\hat{\phi} \hat{\mu}_{ik}}}.$$

Neste modelo existem dois resíduos nulos – ditos falsos – que se encontram nos extremos da diagonal do triângulo. Esta situação ocorre devido à estrutura linear do preditor e ao facto de a estimativa para cada uma dessas observações depender unicamente de uma observação. Desta forma, é necessário excluir esses resíduos no procedimento de *bootstrap*.

Falta agora assegurar que os resíduos são independentes e identicamente distribuídos, e para isso basta padronizá-los – Efron e Tibshirani (1998). Assim, os resíduos de Pearson padronizados são dados por:

$$r_{ik}^{(PS)} = \frac{r_{ik}^{(P)}}{\sqrt{1 - h_{ik}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - h_{ik}}} \frac{c_{ik} - \hat{\mu}_{ik}}{\sqrt{\hat{\phi} \hat{\mu}_{ik}}}$$

onde h_{ik} é o elemento da diagonal da matriz *hat*.

Se se considerar o parâmetro de escala constante (o mesmo para todas as variáveis), basta considerar os resíduos de Pearson padronizados dados por

$$r_{ik}^{(PS_c)} = \frac{1}{\sqrt{1 - h_{ik}}} \frac{c_{ik} - \hat{\mu}_{ik}}{\sqrt{\hat{\mu}_{ik}}} - \text{é indiferente fazer a reamostragem com estes valores}$$

ou os anteriores (diferem a menos de uma constante) desde que esse facto seja tido em conta nos restantes cálculos. No entanto, se se utilizarem os factores de escala variáveis – o mesmo para todos os elementos de cada

coluna, mas diferente entre colunas –, então esta simplificação já não poderá

ser feita e os resíduos de Pearson tomam a forma: $r_{ik}^{(PS_{nc})} = \frac{1}{\sqrt{1-h_{ik}}} \frac{c_{ik} - \hat{\mu}_{ik}}{\sqrt{\hat{\phi}_k \hat{\mu}_{ik}}}$.

2.4.1.3. PARÂMETRO DE ESCALA

Relativamente ao parâmetro de escala, este é calculado como a média dos quadrados dos resíduos da seguinte forma:

$$\phi = \frac{\text{soma do quadrado dos resíduos}}{\text{graus de liberdade}}.$$

England e Verrall (2006) reescrevem este parâmetro como o produto de um factor de correcção do viés (o qual também chamam peso) pela média do quadrado dos resíduos, mas agora calculada sobre todas as observações. Com esta expressão e considerando que só é necessário diferenciar o parâmetro de escala por período de desenvolvimento, isto é, ϕ_k , England e Verrall, no mesmo trabalho, introduzem o cálculo dos factores de escala não constantes, escrevendo-os como produto de um factor de correcção de viés (o mesmo que anteriormente) pela média dos quadrados dos resíduos de cada coluna.

A vantagem da utilização do parâmetro de escala variável só se fará notar se houver evidências fortes de que um parâmetro constante não permite que o modelo se ajuste adequadamente aos dados. No entanto, se se considerar o parâmetro de escala variável, nada nos garante que se obtenha as mesmas estimativas para as reservas que o algoritmo de *chain ladder*. Para além disso,

está-se a sobreparametrizar o modelo, já que há uma observação que serve para estimar dois parâmetros. Este problema poderá ser ultrapassado através do cálculo recursivo do parâmetro de escala.

Na secção 4.2.1.2. aborda-se, na prática, a situação onde o parâmetro de escala não é constante.

2.4.2. ERRO DE PREVISÃO

Um dos primeiros objectivos da utilização de modelos estocásticos nas provisões para sinistros é a possibilidade de calcular a variabilidade das previsões feitas. A forma natural de definir esta medida de variabilidade, o erro de previsão, é através do desvio padrão da distribuição das reservas futuras.

Na literatura, encontram-se denominações diferentes para este conceito, como por exemplo: *standard error of prediction* (SEP), *prediction error* ou *root mean square error of prediction* (RMSEP).

O valor esperado do quadrado do erro de previsão (*mean square error of*

prediction - MSE) é dado por $E[(C_{ik} - \hat{C}_{ik})^2] \approx \text{Var}[C_{ik}] + \text{Var}[\hat{C}_{ik}]$ ou, dito de outra forma, a variância da previsão é a soma da variância do processo – a variabilidade associada aos dados – com a variância da estimação – a variabilidade associada à estimação. O erro de previsão é a raiz quadrada desta soma.

Em termos práticos, a variância do processo é calculada à custa da variância do modelo ajustado, por exemplo, no Modelo de sobredispersão de Poisson, é

o produto do parâmetro de escala pelo valor esperado; em relação à variância da estimação, esta envolve a matriz das variâncias e covariâncias do preditor linear. England e Verrall (2002) apresentam as expressões para o cálculo do quadrado do erro de previsão, que, no caso do Modelo de sobredispersão de Poisson, por ano de acidente é dado por:

$$MSEP[\hat{C}_i] \approx \sum_k \phi V(\mu_{ik}) + \sum_k \mu_{ik}^2 \text{var}(\hat{\eta}_{ik}) + 2 \sum_{\substack{k_1, k_2 \\ k_2 > k_1}} \mu_{ik_1} \mu_{ik_2} \text{cov}(\hat{\eta}_{ik_1}, \hat{\eta}_{ik_2})$$

e para o total das reservas por:

$$MSEP[\hat{C}_{..}] \approx \sum_{i,k} \phi V(\mu_{ik}) + \sum_{i,k} \mu_{ik}^2 \text{var}(\hat{\eta}_{ik}) + 2 \sum_{\substack{i_1, i_2, k_1, k_2 \\ i_1, k_1 \neq i_2, k_2}} \mu_{i_1 k_1} \mu_{i_2 k_2} \text{cov}(\hat{\eta}_{i_1 k_1}, \hat{\eta}_{i_2 k_2}).$$

Quando se utiliza a técnica de *bootstrap*, com o objectivo de obter a distribuição das reservas futuras, uma das formas de calcular o erro de previsão é através do erro padrão das previsões das reservas *bootstrap*, que no caso do Modelo de sobredispersão de Poisson é dado pela expressão

$$PE_{bs}(R) = \sqrt{\hat{\phi} \hat{R} + \frac{n}{n-p} (SE_{bs}(\hat{R}))^2}, \quad (2.1)$$

onde R representa as reservas quer por ano de acidente quer totais, $\hat{\phi}$ e \hat{R} os estimadores dos respectivos parâmetros, $SE_{bs}(\hat{R})$ o erro padrão *bootstrap* da estimativa da reserva, n o número de observações e p o número de parâmetros estimado pelo modelo.

England e Verrall (1999) relembram que esta forma de cálculo não permite a inclusão de cauda, pois não se pode medir a incerteza dos valores preditos para além do ano de desenvolvimento N . Apesar de, para os períodos

superiores a N , termos os parâmetros de linha, não existem parâmetros de coluna e, portanto, o modelo desta forma construído não prevê para além desse período.

No trabalho de Pinheiro *et al.* (2003) encontra-se uma outra abordagem para o conceito do erro de previsão: em cada iteração *bootstrap* calcula-se o erro de previsão, criando para o efeito uma realidade futura, e utiliza-se o j -ésimo percentil da distribuição *bootstrap* do erro para estabelecer as provisões. A esta medida chamaram *percentil of the prediction error* (PPE). Com o PPE já é possível a inclusão de cauda nos dados.

Tem-se assim três formas de calcular as provisões, sendo que as duas primeiras recorrem ao Teorema do Limite Central:

- limite superior do intervalo de confiança com o SEP teórico, a que chamarei Upper (97,5%) é calculado como $R_i + \Phi^{-1}(0,975) SEP_i^{\text{teórico}}$;
- limite superior do intervalo de confiança com o SEP calculado utilizando técnicas de simulação é $R_i + \Phi^{-1}(0,975) SEP_i^{\text{bootstrap ou bayesiano}}$, a que darei o nome de SEP (97,5%);
- o montante baseado no percentil do erro de previsão *bootstrap* dado por $EP_{0,975} \sqrt{\text{Var}(R_i)} + R_i$ aqui denominado PPE (97,5%).

2.5. MODELOS NUM CONTEXTO BAYESIANO

Considerem-se as variáveis aleatórias X_{it} , com $i=1,\dots,k$ e $t=1,\dots,k$, e $f(x_{it}|\theta)$ a função densidade com respeito ao parâmetro θ (θ pode representar um vector de p dimensões). A função verosimilhança do parâmetro, dadas as observações, é $L(\theta|x)=\prod_{i+t\leq k+1} f(x_{it}|\theta)$. Seja $\pi(\theta)$ a função densidade *a priori* para o parâmetro θ . Através do Teorema de Bayes combina-se a verosimilhança com a *prior*, obtendo a distribuição *a posteriori* dos parâmetros: $f(\theta|x)\propto L(\theta|x)\pi(\theta)$, onde $x=\{x_{it}, i+t\leq k+1\}$.

Como o interesse está na distribuição preditiva das variáveis aleatórias na parte inferior do triângulo, X_{it} com $i+t>k+1$, utiliza-se as observações da parte superior do triângulo, x , através da distribuição *a posteriori* dos preditores $f(x_{it}|x)=\int f(x_{it}|\theta)f(\theta|x)d\theta$, $i=1,\dots,k$, $t=1,\dots,k$ com $i+t>k+1$.

Exposto isto, a abordagem bayesiana torna-se natural, pois, sempre que existir informação relevante acerca do parâmetro, esta será incorporada no modelo através da *prior* $\pi(\theta)$. Caso não exista informação disponível, continua-se a poder utilizar este processo, bastando para isso considerar uma *prior* não informativa, ou seja, uma *prior* que mostre a falta de conhecimento em relação ao parâmetro.

Relativamente à variabilidade, nos modelos bayesianos, visto se ter a distribuição *a posteriori* dos preditores, aquela é dada pelo desvio padrão da distribuição preditiva das reservas.

Com frequência, quando se trabalha com distribuições conjugadas, os métodos bayesianos têm, para a distribuição preditiva das variáveis envolvidas, uma expressão explícita. Nesse caso, a inferência preditiva é levada a cabo directamente a partir desta distribuição; qualquer uma das suas características e propriedades, como são os quantis, poderá ser determinada directamente. No entanto, se a distribuição preditiva é de um tipo desconhecido, é possível obter aproximações desta através dos métodos de simulação de Monte Carlo.

2.5.1. MODELO BINOMIAL NEGATIVA

Com o objectivo de ter um modelo que apresentasse uma parametrização mais similar à técnica de *chain ladder*, surgiu este modelo proposto por Verrall e England (2005). Uma das restrições deste modelo é, mais uma vez, o facto da soma das colunas do triângulo dos montantes incrementais ter de ser positiva para garantir que os factores de desenvolvimento sejam superiores a 1 e, desta forma, a variância seja positiva. Com este modelo, é possível intervir ao nível dos factores de desenvolvimento, incluindo os individuais, bastando para tal definir a *prior* conveniente.

Com este trabalho os autores provam que, se se utilizar *priors* não informativas para o parâmetro de linha na parametrização do Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 2 (página 24), é possível utilizar o modelo recursivo Binomial Negativa para os dados, a fim de estimar os parâmetros de linha. Em relação aos parâmetros de coluna $\lambda_2, \dots, \lambda_N$, ser-lhes-á atribuída a distribuição apropriada. Este modelo é, depois, generalizado permitindo que os montantes

incrementais C_{ik} tenham uma distribuição de sobredispersão Binomial Negativa com média $(\lambda_{ik}-1)D_{ik-1}$ e variância $\phi \lambda_{ik}(\lambda_{ik}-1)D_{ik-1}$. O facto de, à partida, o modelo estar sobreparametrizado não constitui problema, já que o objectivo é incluir informação exterior e, ao fazê-lo, deixa-se de ter esse problema. No Capítulo 3 apresenta-se uma parametrização para este modelo.

Em geral, no modelo de *chain ladder*, os factores de desenvolvimento são todos iguais por linha fixada a coluna. Neste modelo, se houver evidências que este facto não é verdadeiro, pode-se dar um valor específico ao factor de desenvolvimento, λ_{ik} – esta parametrização permite uma atitude muito similar sobre os factores de desenvolvimento de *chain ladder*, como a utilizada no modelo determinístico e, portanto, bastante intuitiva.

Assim, no Modelo Binomial Negativa, obtêm-se as estimativas idênticas às de *chain ladder* se se definir que os factores de desenvolvimento são idênticos por coluna, $\lambda_{ik}=\lambda_k$, para $i=1,\dots,N-k+1$ e $k=2,\dots,N$, e para os factores de desenvolvimento λ_k , $k=2,\dots,N$ distribuições *a priori* difusas. Se o actuário considerar que determinado(s) factor(es) de desenvolvimento incremental precisa(m) de ser alterado(s), por exemplo λ_{73} , basta especificar a distribuição *a priori* com média igual ao valor que julgar que este parâmetro deve tomar e variância maior ou menor consoante acreditar nessa previsão ou não. É ainda possível considerar factores de desenvolvimento que utilizem unicamente a informação relativa aos últimos anos de calendário. Para tal, basta dividir os dados em duas partes, cada uma com um factor de desenvolvimento diferente; se se pretende que estes sejam inteiramente estimados pelos dados, basta a sua *prior* ter uma variância grande. Este modo de intervir no cálculo dos

factores de desenvolvimento é praticado, pois, por vezes, a informação mais antiga disponível é pouco fiável ou representa um cenário diferente do actual na companhia.

Em relação ao parâmetro de escala ϕ , os autores do trabalho introduzem-no simplesmente após este ter sido estimado pelo Modelo de sobredispersão de Poisson. No presente trabalho, seguiu-se uma abordagem diferente: este será inteiramente estimado pelo modelo. Para tal, é suficiente indicar a distribuição *a priori* do parâmetro e escrever a função verosimilhança para os dados.

Resumindo tem-se o modelo hierárquico composto por três níveis:

MODELO BINOMIAL NEGATIVA (BAYESIANO)

1º nível – especificação da função verosimilhança

- $\frac{C_{ik}}{\phi} \sim BN\left(\frac{D_{ik-1}}{\phi}, \frac{1}{\lambda_{ik}}\right)$, $i=1, \dots, N$, $k=1, \dots, N$, N é o número de anos de acidente;
- opções possíveis para os factores de desenvolvimento:
 - $\lambda_{ik} = \lambda_k$, $i=1, \dots, N-k+1$ e $k=2, \dots, N$ (*chain ladder*);
 - $\lambda_{ik} = \lambda_k$ para $i=1, \dots, N-k+1$; $k=1, 3, \dots, N$
 $\lambda_{i2} = \lambda_2$ para $i=1, 2, \dots, 7$, $\lambda_{82} = \lambda_{92} = \lambda_{102}$ (por exemplo);
 - $\lambda_{ik} = \lambda_k$ para $i=N-k-3, \dots, N-k+1$
 $\lambda_{ik} = \lambda_k^*$ para $i=1, 2, \dots, N-k-4$ (por exemplo).

2º nível – especificação das *priors* dos parâmetros desconhecidos do modelo

- opções respectivas:
 - $\lambda_k - 1 \sim LN(0.5, 1.0E-6)$ – com variância grande para ser estimado pelos dados;
 - $\lambda_k - 1 \sim LN(0.5, 1.0E-6)$ para $k=1, 3, \dots, N$
 $\lambda_2 - 1 \sim \Gamma(0.005, 0.01)$ ou $\Gamma(25, 50)$ (por exemplo);

MODELO BINOMIAL NEGATIVA (CONT.)

- $\lambda_k - 1 \sim LN(0.5, 1.0E-6)$ para $i = N - k - 3, \dots, N - K + 1$
 $\lambda_k^* - 1 \sim LN(0.5, 1.0E-6)$ para $i = 1, 2, \dots, N - k - 4$ – variâncias grandes para serem estimados pelos dados.
- $\phi \sim \Gamma(\alpha_\phi, \beta_\phi)$ (Verrall e England propõem $\phi = \hat{\phi}$).

3º nível – especificação dos hiperparâmetros (a variância ou a distribuição da variância dos parâmetros desconhecidos); só faz sentido se se deixar o parâmetro de escala ser estimado pelos dados e, nesse caso:

- $\alpha_\phi = \hat{\phi}$
- $\beta_\phi = 0.025$ (por exemplo).

2.5.2. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON

Este modelo foi proposto por Verrall (2004), tendo subjacente o conceito de credibilidade no sentido de ser possível introduzir informação externa ao modelo na sua construção.

Considere-se, novamente, a parametrização do Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 2 (página 24). O modelo é definido da seguinte forma:

- sejam C_{ik} variáveis aleatórias independentes representando os montantes incrementais observados no ano de ocorrência i e no período de desenvolvimento k , com $i, k = 1, \dots, N$;
- $C_{ik} | a, b, \phi \sim ODP(a_i b_k)$ com $\sum_{k=1}^N b_k = 1$, onde $a = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ e $b = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ e $\phi > 1$ é o parâmetro de sobredispersão (escala).

Neste modelo, é possível incorporar informação que o actuário tem sobre o

ramo de negócio que os dados não mostram, nomeadamente o total do montante para sinistros por ano de acidente. Isto é feito definindo a distribuição para cada um dos parâmetros de linha, a ; Verrall propõe que seja uma distribuição Gama, de tal forma que o valor esperado seja igual à estimativa de Bornhuetter-Ferguson para o total do montante para sinistros desse ano. Ao utilizar a distribuição Gama para a *prior*, é ainda possível introduzir a nossa crença em relação à validade das estimativas Bornhuetter-Ferguson através do 2º parâmetro da distribuição. Em relação aos outros dois parâmetros do modelo, b e ϕ , Verrall propõe, para cada um dos elementos do primeiro, uma distribuição Gama de valor esperado 1 e grande variabilidade, de modo a estes serem estimados inteiramente pelos dados; quanto ao parâmetro de escala, este é simplesmente introduzido no modelo depois de ter sido ajustado o Modelo de sobredispersão de Poisson.

Finalmente, calculam-se as reservas como a soma dos valores preditos para cada ano de acidente, formando, deste modo, a distribuição preditiva dos montantes das reservas.

O modelo hierárquico de sobredispersão de Poisson com três níveis:

MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO)

1º nível – especificação da função verosimilhança

- $C_{ik}|a, b, \phi \sim ODP(\mu_{ik})$;
- $\mu_{ik} = a_i b_k$;
- $\sum_{k=1}^N b_k = 1$;
- $i = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, N$, N é o número de anos de acidente.

MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (CONT.)

2º nível – especificação das *priors* dos parâmetros desconhecidos do modelo

- $a_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ tal que $E[a_i] = \frac{\alpha_i}{\beta_i} = U_i^{(BF)}$, com $U_i^{(BF)}$ a estimativa de Bornhuetter-Ferguson para o total de sinistros do ano de acidente i , $i=1, \dots, N$;
- $b_k \sim \Gamma(0.0001, 0.0001)$, $k=1, \dots, N$;
- $\phi \sim \Gamma(\alpha_\phi, \beta_\phi)$ – esta parametrização não é a inicialmente proposta por Verall ($\phi = \hat{\phi}$), mas optamos por seguir a sugestão de Scollnik (2005) para, desta forma, termos um modelo bayesiano completo.

3º nível – especificação dos hiperparâmetros (a variância ou a distribuição da variância dos parâmetros desconhecidos)

- $\beta_i = 1000$ (pode ou não ser igual para todos os i);
- $\alpha_i = U_i^{(BF)} \beta_i$;
- $\alpha_\phi = \hat{\phi}$;
- $\beta_\phi = 0.01$ (por exemplo).

2.5.3. MODELO LOG-NORMAL DE TRÊS PARÂMETROS

É natural encontrar conjuntos de montantes incrementais de valor negativo em determinado ramo de negócio. Este facto deve-se a inúmeras causas, encontrando-se entre as mais comuns os salvados, os pagamentos de terceiros, as decisões de contencioso, etc. Já se referiram modelos estocásticos que comportam valores negativos, mas, quando em excesso, estes deixam de ser aplicáveis. O modelo agora apresentado está indicado para ramos de negócio que, por natureza, apresentem valores com este comportamento e não para ramos em que, por algum motivo, haja um caso pontual de valor negativo. Nestas circunstâncias deverá aferir-se qual a causa e, se for caso disso, corrigir o montante – ver de Alba e Bonilla (2002).

Perante o cenário de vários montantes incrementais negativos, de Alba (2002) propõe o Modelo log-Normal com três parâmetros, em que um destes tem a finalidade de suportar os valores negativos dos dados.

Matematicamente o modelo é definido por:

- sejam C_{ik} variáveis aleatórias independentes representando os montantes incrementais observados no ano de ocorrência i e no período de desenvolvimento k , com $i, k=1, \dots, N$;
- seja $Y_{ik} = \log(C_{ik} + \delta)$, para $C_{ik} + \delta > 0$, com $i, k=1, \dots, N$;
- $Y_{ik} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Com o modelo definido desta forma, C_{ik} tem uma distribuição log-Normal de três parâmetros δ, μ e σ^2 , onde δ é o parâmetro *threshold*.

Parametrizando o modelo em termos das componentes de ano de ocorrência e de período de desenvolvimento, é possível reescrevê-lo da seguinte forma:

$$Y_{ik} = \log(C_{ik} + \delta) = \mu + \alpha_i + \beta_k + \varepsilon_{ik}, \varepsilon_{ik} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \text{ para } i, k=1, \dots, N \text{ e } i+k \leq N+1.$$

Assim, C_{ik} tem uma distribuição log-Normal de três parâmetros que se denota por $C_{ik} \sim LN(\mu_{ik}, \sigma^2, \delta)$ com $\mu_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_k$. Nesta parametrização são necessárias as restrições $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

No modelo aqui apresentado o parâmetro δ será estimado no próprio modelo, através da utilização da função verosimilhança $L(\theta, \sigma^2, \delta | \mathbf{c})$, onde θ representa o vector dos parâmetros $\theta = (\mu, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_2, \dots, \beta_N)'$ e $\mathbf{c} = \{C_{ik}, i+k \leq N+1\}$ representa os dados observados que constituem a parte

superior do triângulo incremental. Para mais detalhe consultar o artigo de de Alba (2006).

Tem-se assim o modelo hierárquico composto por três níveis:

MODELO LOG-NORMAL

1º nível – especificação da função verosimilhança

- $Y_{ik} = \log(C_{ik} + \delta) \sim N(\mu_{ik}, \sigma^2)$;
- $\mu_{ik} = \mu + \alpha_i + \beta_k$;
- $\alpha_1 = \beta_1 = 0$;
- $i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, N, N$ é o número de anos de acidente.

2º nível – especificação das *priors* dos parâmetros desconhecidos do modelo

- $\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$;
- $\alpha_i \sim N(0, \sigma_{\alpha_i}^2)$;
- $\beta_k \sim N(0, \sigma_{\beta_k}^2)$;
- $\sigma^2 \sim IG(\nu, \lambda)$ (*IG* denota a distribuição Gama Inversa);
- $\delta \sim N(\mu_\delta, \sigma_\delta^2)$.

3º nível – especificação dos hiperparâmetros (a variância ou a distribuição da variância dos parâmetros desconhecidos)

- $\sigma_\mu^2 \sim IG(0.1, 0.1)$;
- $\sigma_{\alpha_i}^2 \sim IG(0.001, 0.001)$;
- $\sigma_{\beta_k}^2 \sim IG(0.001, 0.001)$;
- $\nu \sim G(1.1, 0.1)$;
- $\lambda \sim G(1.4, 0.1)$;
- $\mu_\delta \sim N(\text{mmudelta}, \text{smudelta})$;
- $\sigma_\delta^2 \sim IG(\text{asdelta}, \text{bsdelta})$.
- nota: todos estes parâmetros são especificados quando da aplicação do modelo.

2.6. TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO PARA O CÁLCULO DAS RESERVAS

Para se obter a distribuição preditiva das reservas, é necessário recorrer a técnicas de simulação. No contexto dos MLG, através da técnica de *bootstrap* consegue-se ter esta distribuição; nos modelos bayesianos, tem de se utilizar a técnica Markov chain Monte Carlo (MCMC) para obter a distribuição *a posteriori* dos parâmetros – e, por consequência, a distribuição preditiva das reservas –, visto nem sempre ser possível obtê-la analiticamente ou esta ser de difícil manuseamento quando não se restringe à utilização de distribuições conjugadas.

Tabela 2.2 – Comparação das técnicas de simulação na obtenção da distribuição das reservas

Bootstrap	MCMC
Definir o modelo estatístico.	
Ajustar o modelo e obter os resíduos.	Com a amostragem de Gibbs obter a distribuição <i>a posteriori</i> para os parâmetros.
Iniciar o ciclo bootstrap com a reamostragem dos resíduos e construir pseudodados.	
Ajustar o modelo aos novos dados e obter valores para as observações futuras.	Obter a estimativa das observações futuras à custa da distribuição <i>a posteriori</i> das observações.
Efectuar a soma dos montantes futuros, tanto por ano de acidente como total, e armazenar essa informação para cada iteração.	Efectuar a soma dos montantes futuros tanto por ano de acidente como total.
Com os valores armazenados, obtém-se a distribuição preditiva das reservas, sendo que o seu valor médio é o montante das reservas e o seu desvio-padrão o erro de previsão.	

Na tabela 2.2, faz-se a comparação sistemática dos procedimentos necessários para obter a distribuição das reservas quando se utilizam as técnicas de simulação de *bootstrap* e MCMC.

Um exemplo de aplicação destas técnicas encontra-se no trabalho de England

e Verrall (2006), que as aplicam a três modelos distintos para cálculo da distribuição preditiva das reservas: sobredispersão de Poisson, sobredispersão Binomial Negativa e de Mack.

2.6.1. BOOTSTRAP

Descreve-se agora, mais pormenorizadamente, a aplicação da metodologia de *bootstrap*, introduzida por Efron e Tibshirani (1998), ao cálculo das provisões para sinistros.

A reamostragem é feita sob a hipótese de que as variáveis sejam independentes e identicamente distribuídas, razão que leva à utilização dos resíduos de Pearson padronizados para o efeito.

O procedimento apresentado em seguida tem por base o trabalho de England (2002), ao qual Pinheiro *et al.* (2003) acrescentaram mais um passo, de modo a introduzir o cálculo de outra medida de variabilidade.

Procedimento:

- após a escolha e ajuste do modelo aos dados observados, calculam-se os resíduos de Pearson padronizados e as previsões para os elementos da parte inferior do triângulo, assim como as reservas por ano de acidente e total;
- inicia-se então o ciclo *bootstrap*, que será repetido NB (=1000) vezes:
 - faz-se a reamostragem com reposição dos resíduos, de modo a ter um novo triângulo de resíduos;

- cria-se novos dados (pseudodados), invertendo a expressão dos resíduos de Pearson e obtendo, desta forma, uma nova parte superior do triângulo;
 - estima-se novamente o modelo, agora com os pseudodados, de modo a obter novos valores para as reservas (tanto por ano de acidente como totais);
 - faz-se uma nova reamostragem com reposição dos resíduos iniciais, mas agora só serão necessários tantos quantos as previsões, ou seja, tantos quantos os elementos na parte inferior do triângulo;
 - cria-se uma pseudo-realidade para os valores futuros invertendo a expressão dos resíduos – utilizando as previsões iniciais e estes últimos resíduos;
 - calcula-se o valor para as reservas e, com estes, os resíduos de Pearson – o erro de previsão – das mesmas, tanto por ano de acidente como total, terminando, desta forma, o ciclo *bootstrap*; note-se que o valor das reservas agora calculado desempenha o papel de observações e os seus estimadores são as reservas do segundo ajuste do modelo (calculado em cada iteração *bootstrap*);
- obtém-se o valor para a variância das estimativas através do quadrado do erro padrão *bootstrap* das NB iterações, $SE_{bs,NB}(\hat{R})^2$, e calcula-se a variância do processo utilizando a expressão (2.1);
- determina-se o j -ésimo percentil do erro de previsão e obtém-se o respectivo percentil das provisões invertendo, mais uma vez, a

expressão dos resíduos, utilizando agora como estimadores as reservas do modelo original, tanto por ano de acidente como total.

Existem algumas limitações à utilização da técnica de *bootstrap* no campo das reservas. Deve-se evitar o tratamento de medidas extremas quando se utiliza esta técnica e, portanto, ao obter, desta forma, a distribuição das reservas há que ter cuidado com o estudo dos valores extremos que pertencem à cauda da distribuição – caso se tenha a noção da sua existência, deverá complementar-se o trabalho com outras metodologias. Um outro problema bastante relevante, e que já o é no ajuste do modelo, é a dimensão da amostra disponível. Neste caso, a aleatoriedade devido ao processo de amostragem é bastante grande e, se a isto se juntar um fraco ajuste do modelo, pode-se ter uma distribuição final bastante desvirtuada.

2.6.2. MARKOV CHAIN MONTE CARLO

Na determinação da distribuição *a posteriori* dos preditores, é necessário proceder ao cálculo de integrais, em ordem ao parâmetro θ . Ora, este parâmetro raramente é univariado, pelo que, sempre que se quer obter a distribuição *a posteriori*, está-se perante o cálculo de integrais a várias dimensões. Esta poderá ser uma das limitações do processo bayesiano.

Uma forma de ultrapassar esta dificuldade do cálculo integral é recorrendo a técnicas de simulação computacionais nas quais se encontram os métodos

MCMC. Para um estudo aprofundado sobre o tema poderão ser tomados como referência os trabalhos de Walsh (2004) e Scollnik (1996, 2001).

Para melhor perceber o nome MCMC, atenda-se a que este se divide em duas componentes: Markov chain (cadeia de Markov) e Monte Carlo (integração de Monte Carlo). Relativamente à integração de Monte Carlo, esta consiste em calcular o valor de um integral como o valor esperado de uma determinada distribuição; neste cálculo é necessário simular amostras com a distribuição escolhida. Para isso, recorre-se a cadeias de Markov cuja distribuição estacionária é a distribuição pretendida.

2.6.2.1. INTEGRAÇÃO DE MONTE CARLO

Como foi referido, a integração de Monte Carlo é utilizada para aproximar a distribuição *a posteriori* e fá-lo recorrendo à teoria das probabilidades da seguinte forma:

Seja $\int_a^b f(x)dx$ o integral que se pretende determinar

- decomponha-se a função $f(x)$ como o produto de uma função $h(x)$ por uma função densidade $p(x)$ definida no intervalo (a, b) ;
- escreva-se o integral pretendido na seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)p(x)dx = E_{p(x)}[h(x)];$$

- dadas as variáveis aleatórias, x_1, \dots, x_m , com função densidade $p(x)$,

$$\text{então } \int_a^b f(x)dx = E_{p(x)}[h(x)] \simeq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(x_i) \quad (2.2).$$

Com base na integração de Monte Carlo pode-se calcular a distribuição a

posteriori, fazendo a aproximação $\int f(x_{it}|\theta)f(\theta|x)d\theta \simeq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f(x_{it}|\theta_i)$, onde

θ_i é uma variável aleatória com função densidade $f(\theta|x)$.

2.6.2.2. AMOSTRAGEM DE GIBBS

A amostragem de Gibbs permite a construção de uma cadeia de Markov nas condições pretendidas, tratando-se de um caso especial da amostragem do tipo Metropolis-Hastings. A ideia fundamental da amostragem de Gibbs é considerar distribuições condicionais univariadas.

Seja $X=(X_1, \dots, X_n)$ o vector das variáveis aleatórias. Esta técnica simula, sequencialmente, n variáveis aleatórias de entre n univariadas condicionais ao invés de gerar, com base na distribuição conjunta, uma n -dimensional de uma só vez (algoritmo Metropolis-Hastings). Desta forma o valor da k -ésima variável é escolhida a partir da distribuição $p(X_k|X_{(-k)})$, onde o vector $X_{(-k)}$ representa o vector com todos os valores com excepção do k -ésimo; na i -ésima iteração da amostra, o valor de $x_k^{(i)}$ é extraído da distribuição

$$x_k^{(i)} \sim p(X_k | X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}^{(i)}, X_{k+1} = x_{k+1}^{(i-1)}, \dots, X_n = x_n^{(i-1)}).$$

Exemplificando com uma amostra de dimensão n :

- considera-se um valor inicial para $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$;

- obtém-se $x_1^{(1)}$ gerando uma variável aleatória com distribuição condicional $p(X_1|X_2=x_2^{(0)}, \dots, X_n=x_n^{(0)})$, ou seja, $x_1^{(1)} \sim p(X_1|X_2=x_2^{(0)}, \dots, X_n=x_n^{(0)})$;
- com este novo valor de $x_1^{(1)}$ e os valores passados das restantes variáveis, gera-se o valor de $x_2^{(1)}$, $x_2^{(1)} \sim p(X_2|X_1=x_1^{(1)}, X_3=x_3^{(0)}, \dots, X_n=x_n^{(0)})$;
- com os novos valores de $x_1^{(1)}$ e $x_2^{(1)}$ e os valores passados das restantes variáveis, gera-se o valor de $x_3^{(1)}$, $x_3^{(1)} \sim p(X_3|X_1=x_1^{(1)}, X_2=x_2^{(1)}, \dots, X_n=x_n^{(0)})$;
- de igual modo geram-se $x_t^{(1)}$ com $t=4, \dots, n$.

Completa-se, desta forma, uma primeira iteração do algoritmo que define a transição de $X^{(0)}$ para $X^{(1)}$, na qual se obteve o valor de $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$. Este constitui uma amostra simulada da distribuição conjunta.

Se se pretende construir uma sequência de Gibbs de dimensão m , $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$, para o cálculo do integral (2.2), realizam-se m iterações.

Para não haver dependência do valor inicial da amostra escolhido e eliminar a dependência entre amostras, na prática obtém-se uma amostra de dimensão m tendo em conta os procedimentos: (1) descartar as primeiras simulações, com

um *burn-in* inicial, de modo a remover o efeito da escolha inicial da amostra (não esquecer que é necessário assegurar que a cadeia de Markov converge);
(2) escolher o vector para amostra de n em n amostras após o *burn-in*. Desta forma a sequência de Gibbs converge para a distribuição estacionária (de equilíbrio) e é independente dos valores iniciais.

CAPÍTULO 3 – APRESENTAÇÃO DOS DADOS, MELHOR ESTIMATIVA E MODELOS APLICADOS

Iniciei o meu estágio na Allianz Portugal com a revisão de modelos determinísticos, sendo estes o modelo de *chain ladder* e o modelo de Bornhuetter-Ferguson, apresentados no Capítulo 1. Na disciplina de Provisões para Sinistros – disciplina curricular do Mestrado em Ciências Actuarias – tive oportunidade de trabalhar estes dois modelos. Assim, fiquei com a noção de que as reservas da seguradora poderiam ser dadas directamente por aplicação destes modelos – assim como de outros também estudados –, ficando à consideração do actuário a escolha daquele que mais se adequasse aos dados e conhecimentos de que dispunha. No decorrer do estágio percebi que também pode ficar ao critério do actuário escolher os factores de desenvolvimento que considera mais correctos perante o conhecimento que tem do ramo de negócio em que está a trabalhar. Com o objectivo de apresentar a melhor estimativa para as reservas complementei os meus conhecimentos anteriores com o estudo dos trabalhos de Berquist e Sherman (1977) e de Ghezzi (2001).

De forma breve apresento os dados que serviram de base ao trabalho realizado, assim como as suas principais características. São três conjuntos de dados agregados, representando três modalidades de negócio do ramo Não Vida – automóvel, multiriscos e acidentes de trabalho –, no período de 1996 a 2008 e respectivo prémio de risco. Com base na análise determinística desta

informação apresento a minha melhor estimativa para o montante dos pagamentos futuros e a parametrização dos modelos do Capítulo 2.

Considero que, mais do que ajustar um modelo para a previsão das reservas, o importante é perceber qual o comportamento dos dados, as políticas da empresa, o comportamento do mercado, etc., para que, desta forma, as opções tomadas, na escolha tanto do modelo como dos parâmetros, estejam de acordo com essas convicções e informações.

3.1. RAMO DE NEGÓCIO 1

Inicia-se a apresentação dos dados com um ramo de negócio cujos montantes incrementais, assim como o prémio de risco, estão apresentados na tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Montantes incrementais, prémio de risco e factores de desenvolvimento de chain ladder do ramo de negócio 1

Ano de acidente	período de desenvolvimento												Prémio de risco	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12
1996	392.088	150.628	48.243	40.490	23.353	18.557	29.645	14.883	8.310	4.225	4.710	4.848	1.503	850.793
1997	368.791	215.815	50.984	41.314	37.047	29.051	26.889	13.407	18.014	6.925	8.900	3.220		865.570
1998	400.179	219.989	52.333	39.994	26.622	29.857	25.140	13.607	5.830	16.001	4.162			885.896
1999	421.385	279.596	66.219	36.054	27.720	36.175	20.407	22.925	11.963	11.637				919.408
2000	500.189	261.628	64.977	40.088	33.900	21.384	24.659	27.707	16.695					972.012
2001	509.249	205.022	45.398	43.464	26.964	29.540	26.335	14.782						984.336
2002	472.884	219.964	53.268	38.117	26.488	26.469	24.505							1.031.689
2003	525.220	251.202	52.572	33.119	25.971	38.230								1.177.338
2004	564.472	254.903	56.661	48.822	41.091									1.311.652
2005	497.322	213.349	53.679	53.460										1.326.213
2006	416.259	202.399	46.485											1.203.325
2007	405.172	191.399												1.158.442
2008	422.447													1.064.596
Factores de desenvolvimento de chain ladder														
incrementais	1,0000	1,4871	1,0783	1,0556	1,0381	1,0360	1,0313	1,0215	1,0145	1,0119	1,0075	1,0052	1,0020	

Da análise dos dados deste ramo verifico que a taxa de encerramento (calculada como o quociente entre o número de sinistros encerrados e o

número de participados), nos anos de 2000 e 2001, apresenta um aumento considerável relativamente aos anos anteriores; após este período o seu crescimento é muito ligeiro até 2007 e em 2008, pelo facto do número de sinistros encerrados ser consideravelmente superior ao dos participados, apresenta um valor mais elevado. No que respeita ao montante pago por sinistro encerrado, desde o ano de 2001 este valor tem vindo a diminuir. Conjugando o estudo da taxa de encerramento com o do montante pago por sinistro encerrado leva-me a concluir que tem havido uma tendência para uma regularização mais célere dos sinistros.

Para ir ao encontro das particularidades apresentadas pelos dados a escolha dos factores de desenvolvimento é baseada nos montantes pagos relativos aos últimos oito anos de acidente. Na tabela 3.2 encontram-se os factores de desenvolvimento escolhidos – tanto na forma incremental como acumulada – assim como o total dos montantes para sinistros observados. Na última linha desta tabela encontra-se a probabilidade acumulada de desenvolvimento e, a vermelho, os valores superiores a 98%.

Tabela 3.2 – Factores de desenvolvimento escolhidos para o ramo de negócio 1

	período de desenvolvimento												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
incrementais	1,0000	1,4626	1,0758	1,0511	1,0372	1,0349	1,0313	1,0215	1,0145	1,0119	1,0075	1,0052	1,0020
acumulados	1,9481	1,9481	1,3319	1,2381	1,1779	1,1357	1,0975	1,0642	1,0417	1,0269	1,0148	1,0072	1,0020
prob acumulada	51.33%	75.08%	80.77%	84.89%	88.05%	91.12%	93.97%	95.99%	97.38%	98.54%	99.28%	99.80%	100.00%

Ao fim de nove anos após a data de ocorrência do acidente 1,5% de pagamentos estão por efectuar, o que, num universo de €10.477.546, representa €152.794. Este aspecto leva a supor que doze anos não é suficiente

para regularizar os pagamentos neste ramo de negócio, sendo que vinte o poderão ser. Assim construí uma cauda para os dados utilizando a expressão

$$\lambda_k = 1 + 0,7(\lambda_{k-1} - 1), \quad k = 7, \dots, 20, \text{ obtendo os factores de desenvolvimento}$$

apresentados na tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Factores de desenvolvimento escolhidos para os montante pagos para um período de vinte anos (ramo de negócio 1)

Factores de desenvolvimento	período de desenvolvimento										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
incrementais	1,0000	1,4626	1,0758	1,0511	1,0372	1,0349	1,0313	1,0219	1,0153	1,0107	1,0075
acumulados	1,9343	1,9343	1,3225	1,2293	1,1696	1,1277	1,0897	1,0566	1,0340	1,0183	1,0075
prob acumulada	50,83%	74,34%	79,97%	84,06%	87,18%	90,22%	93,04%	95,08%	96,54%	97,58%	98,31%

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1,0053	1,0037	1,0026	1,0018	1,0013	1,0009	1,0006	1,0004	1,0003	1,0002
1,0172	1,0118	1,0081	1,0055	1,0037	1,0025	1,0016	1,0009	1,0005	1,0002
98,83%	99,19%	99,45%	99,63%	99,76%	99,84%	99,91%	99,95%	99,98%	100,00%

A escolha do período de desenvolvimento a partir do qual o modelo para a cauda foi construído, baseia-se no facto de, a partir do período de desenvolvimento 7, os montantes para sinistros incrementais apresentarem valores bastante diferentes para cada um dos anos de acidente. O parâmetro k representa a taxa de encerramento que considero apropriada para estes dados. Assim, com base nesta escolha dos factores de desenvolvimento, para um período de vinte anos, proponho a melhor estimativa apresentada na tabela 3.4.

Tabela 3.4 – Melhor estimativa para o montante de sinistros pagos por período de desenvolvimento (ramo de negócio 1)

Ano de acidente	Montante pago	Prob acumulada	Reservas	Montante total para sinistros
1996	741.482	0,9919	6.025	747.507
1997	820.359	0,9883	9.713	830.072
1998	833.714	0,9831	14.310	848.024
1999	934.082	0,9758	23.176	957.258
2000	991.227	0,9654	35.503	1.026.731
2001	900.754	0,9508	46.577	947.331
2002	861.696	0,9304	64.421	926.116
2003	926.314	0,9022	100.424	1.026.738
2004	965.949	0,8718	142.041	1.107.990
2005	817.810	0,8406	155.116	972.926
2006	665.143	0,7997	166.561	831.704
2007	596.570	0,7434	205.933	802.503
2008	422.447	0,5083	408.709	831.155
	10.477.546		1.378.509	11.856.055

Após a análise determinística dos dados escolhem-se os modelos estocásticos a aplicar. Iniciarei com o Modelo de sobredispersão de Poisson, tanto no contexto dos MLG como num contexto bayesiano. Considerarei modelos com cauda, com parâmetro de escala variável e simultaneamente com cauda e parâmetro de escala variável (que para os períodos de desenvolvimento superiores ao observado será igual ao do décimo segundo período de desenvolvimento). Posteriormente trabalharei o Modelo de Mack com cauda.

Finalmente será aplicado o Modelo Binomial Negativa (bayesiano) visto permitir modelar a alteração registada na política de encerramento, a partir de 2001; para tal basta agregar os montantes pagos em dois grupos – um caracterizado por variações significativas no pagamento por sinistro encerrado e da taxa de encerramento e outro, posterior a 2001, por padrões mais estáveis tanto no montante pago por acidente como da taxa de encerramento.

3.2. RAMO DE NEGÓCIO 2

Os montantes, os prémios de risco e os factores de desenvolvimento de *chain ladder* deste ramo de negócio são apresentados na tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Montantes incrementais, prémio de risco³ e factores de desenvolvimento de chain ladder do ramo de negócio 2

Ano de acidente	período de desenvolvimento													Prémio de risco
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1996	25.026	14.434	1.326	723	195	334	36	1	1	0	0	0	0	42.076
1997	20.804	21.673	4.938	860	782	114	307	23	8	1	-11	0		49.500
1998	30.310	27.472	3.925	733	2.032	18	4	27	14	-35	3			64.503
1999	29.400	30.159	1.421	417	89	169	10	37	20	207				61.926
2000	37.397	36.118	4.227	702	928	267	11	-11	37					79.734
2001	54.354	27.165	1.188	698	243	-337	51	73						83.518
2002	48.746	33.388	2.125	1.681	221	337	211							86.830
2003	58.626	24.387	397	161	259	21								84.082
2004	62.716	25.034	1.067	1.260	1.186									224.397
2005	51.464	24.834	1.354	354										240.325
2006	61.533	44.028	3.825											255.306
2007	69.578	35.068												273.927
2008	107.615													294.508

Factores de desenvolvimento de chain ladder

incrementais	1,0000	1,6251	1,0327	1,0108	1,0093	1,0017	1,0014	1,0004	1,0003	1,0008	0,9999	1,0000	1,0000
--------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Este ramo de negócio tem apresentado um crescimento do número de sinistros encerrados e dos reportados, com excepção para os anos de 2000 e de 2007, sendo de salientar um aumento bastante significativo no ano de 2008. Tanto a taxa de encerramento como o montante pago por sinistro encerrado reflectem este último comportamento já que, a partir de 2007, invertem a tendência de decrescimento apresentada desde 2003. Este facto leva a supor que houve uma alteração na política de encerramento de sinistros, de modo a haver mais encerramentos. O facto dos pagamentos de sinistros serem efectuados de uma só vez e até determinado montante sem fiscalização, deixa este ramo de negócio mais exposto à fraude, e portanto a seguradora sujeita a pagamentos mais elevados do que os devidos.

Um outro facto que não passa despercebido é a existência de alguns

³ Nos anos de acidente de 1998 a 2003 os montantes indicados como prémios de risco têm por base a melhor estimativa da seguradora.

montantes negativos – resultado de reembolsos de pagamentos indevidos – e de que os pagamentos a partir do quinto ano após o acidente apresentam um comportamento irregular, sendo que, a partir do décimo primeiro ano, não há qualquer pagamento efectuado. De entre estes montantes o valor -337 sobressai; interessava saber se se refere a um único sinistro ou não ou se é possível imputar parcialmente a períodos de desenvolvimento anteriores, no entanto, não me foi possível apurar as causas deste reembolso. Desta forma optei por, na escolha dos factores de desenvolvimento, não o incluir, sendo que o valor considerado para o quinto período de desenvolvimento reflecte esse facto.

Com base neste estudo, procurei não penalizar mais o esforço do encerramento do último ano com os factores de desenvolvimento e utilizei um factor de desenvolvimento que “ignorasse” os montantes negativos apresentados. Na tabela 3.6 apresento os factores de desenvolvimento considerados.

Tabela 3.6 – Factores de desenvolvimento escolhidos para o ramo de negócio 2

	período de desenvolvimento												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
incrementais	1,0000	1,6426	1,0327	1,0115	1,0087	1,0032	1,0014	1,0004	1,0004	1,0004	1,0003	1,0003	1,0003
acumulados	1,7424	1,7424	1,0608	1,0272	1,0155	1,0067	1,0035	1,0021	1,0017	1,0013	1,0010	1,0006	1,0003
prob acumulada	57.39%	94.27%	97.35%	98.47%	99.33%	99.65%	99.79%	99.83%	99.87%	99.90%	99.94%	99.97%	100.00%

Com estes factores de desenvolvimento, a melhor estimativa proposta é apresentada na tabela 3.7.

Tabela 3.7 – Melhor estimativa para o montante de sinistros pagos por período de desenvolvimento (ramo de negócio 2)

Ano de acidente	Montante pago	Prob acumulada	Reservas	Montante total para sinistros
1996	42.076	1,0000	0	42.076
1997	49.500	0,9997	15	49.515
1998	64.503	0,9994	41	64.544
1999	61.929	0,9990	61	61.990
2000	79.675	0,9987	107	79.782
2001	83.434	0,9983	144	83.578
2002	86.710	0,9979	184	86.894
2003	83.851	0,9965	292	84.143
2004	91.263	0,9933	614	91.877
2005	78.006	0,9847	1.210	79.216
2006	109.386	0,9735	2.976	112.362
2007	104.646	0,9427	6.360	111.007
2008	107.615	0,5739	79.898	187.513
	1.042.595		91.903	1.134.497

Devido à existência de valores negativos consideráveis assim como de valores nulos, os modelos estocásticos de sobredispersão de Poisson e Binomial Negativa, apresentados no capítulo 2, não são aplicáveis. Analisando a probabilidade de desenvolvimento acumulada, esta é superior a 98% logo no terceiro ano do acidente, restando apenas 2% a serem pagos durante os restantes nove anos; a corroborar este facto é de assinalar que, até três anos após o ano de acidente, o número de sinistros declarado é praticamente nulo.

Uma forma de ultrapassar a limitação dos modelos e a dificuldade dos dados será recorrer a soluções mais técnicas; assim, e pelo facto do espaço de anos necessário para regularizar os sinistros ser curto, adoptei duas formas de modelar os dados: considerar sinistros cujo ano de acidente é inferior a seis anos, e por outro, montantes pagos até seis anos após a ocorrência do acidente.

Para o primeiro cenário apresenta-se os dados na tabela 3.8 e para o segundo na tabela 3.9.

Tabela 3.8 – Montantes incrementais e prémio de risco do ramo de negócio 2 para sinistros no máximo com seis anos

Ano de acidente	período de desenvolvimento						Prémio de risco
	0	1	2	3	4	5	
2003	58.626	24.387	397	161	259	21	84.082
2004	62.716	25.034	1.067	1.260	1.186		224.397
2005	51.464	24.834	1.354	354			240.325
2006	61.533	44.028	3.825				255.306
2007	69.578	35.068					273.927
2008	107.615						294.508

Tabela 3.9 – Montantes incrementais do ramo de negócio 2 sob a forma de trapézio

Ano de acidente	período de desenvolvimento						Prémio de risco
	0	1	2	3	4	5	
1996	25.026	14.434	1.326	723	195	334	42.076
1997	20.804	21.673	4.938	860	782	114	49.500
1998	30.310	27.472	3.925	733	2.032	18	64.503
1999	29.400	30.159	1.421	417	89	169	61.926
2000	37.397	36.118	4.227	702	928	267	79.734
2001	54.354	27.165	1.188	698	243	-337	83.518
2002	48.746	33.388	2.125	1.681	221	337	86.830
2003	58.626	24.387	397	161	259	21	84.082
2004	62.716	25.034	1.067	1.260	1.186		224.397
2005	51.464	24.834	1.354	354			240.325
2006	61.533	44.028	3.825				255.306
2007	69.578	35.068					273.927
2008	107.615						294.508

Na primeira abordagem muitos valores históricos estão a ser eliminados e a modelação é feita só com vinte e um dados, o que é nitidamente pouco; no segundo caso consideram-se mais dados históricos e, como consta na tabela 3.6, no quinto ano após o acidente 99,79% do montante total estará pago.

Com este novo conjunto de dados para o montante pago é possível utilizar os Modelos de sobredispersão de Poisson e Binomial Negativa.

3.3. RAMO DE NEGÓCIO 3

Na tabela 3.10, estão representados os montantes incrementais das indemnizações agregadas deste ramo de negócio, assim como o montante dos prémios de risco e os factores de desenvolvimento de *chain ladder*.

Tabela 3.10 – Montantes incrementais e prémio de risco do ramo de negócio 3

Ano de acidente	período de desenvolvimento												Prémio de risco	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		12
1996	82.322	51.475	11.825	2.338	1.479	1.399	-148	-390	-595	479	613	529	668	288.753
1997	90.636	68.086	7.206	3.097	1.357	721	570	522	-769	-256	-111	187		291.074
1998	103.259	63.237	10.995	3.273	1.108	-1.046	-410	500	-9	60	-641			297.636
1999	88.921	73.234	9.519	508	-276	-186	500	987	737	649				306.466
2000	107.969	73.760	12.149	3.487	-3.241	1.431	700	890	920					395.139
2001	110.843	66.466	8.363	492	151	-139	1.165	903						369.767
2002	102.073	70.430	3.330	2.362	1.541	1.439	1.032							403.009
2003	117.445	59.214	7.290	2.535	4.070	1.115								442.867
2004	122.821	60.992	8.430	3.799	2.463									452.971
2005	113.671	56.813	8.857	2.260										433.376
2006	113.259	57.100	7.924											402.393
2007	119.736	63.830												400.599
2008	135.608													380.642
Factores de desenvolvimento de <i>chain ladder</i>														
incrementais	1,0000	1,6007	1,0517	1,0136	1,0054	1,0033	1,0028	1,0032	1,0003	1,0014	0,9997	1,0022	1,0044	

Os dados apresentam um número considerável de montantes negativos, nomeadamente após o terceiro ano da ocorrência do sinistro. Isto deve-se fundamentalmente ao facto de incluírem sinistros com características distintas: os pagamentos imediatos, que surgem até três anos após a sua ocorrência, e os pagamentos referentes à cobertura de longo prazo que se encontram sob a forma de fundo de reserva. A taxa de encerramento apresentou um aumento significativo em relação aos anos anteriores, nos quais, desde 2003, se apresentava relativamente estável. Em relação ao montante pago por sinistro

encerrado, contrariamente aos outros ramos de negócio, tem apresentado uma tendência ligeira de crescimento desde 1996.

Com o objectivo de dar a melhor estimativa para este ramo de negócio, decidi considerar os quatro primeiros anos de desenvolvimento como um conjunto de dados à parte e os restantes modelar de forma análoga à cauda considerada no ramo de negócio 1. O facto de não procurar as causas ou trabalhar os dados de modo a não haverem montantes incrementais negativos, deveu-se à natureza dos mesmos.

Na prática, os factores de desenvolvimento que considero até ao período quatro não incluem o último ano observado e após esse período, até aos treze anos de observações, considero os factores dados pela expressão $\lambda_k = 1 + 0,85(\lambda_{k-1} - 1)$, $k=5, \dots, 20$, obtendo os factores de desenvolvimento apresentados na tabela 3.11.

Tabela 3.11 – Factores de desenvolvimento escolhidos para o ramo de negócio 3

	período de desenvolvimento												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
incrementais	1,0000	1,6077	1,0522	1,0137	1,0117	1,0099	1,0084	1,0072	1,0061	1,0052	1,0044	1,0037	1,0032
acumulados	1,8203	1,8203	1,1322	1,0760	1,0614	1,0492	1,0389	1,0302	1,0228	1,0166	1,0114	1,0069	1,0032
prob acumulada	54.94%	88.32%	92.93%	94.21%	95.31%	96.26%	97.07%	97.77%	98.36%	98.87%	99.31%	99.68%	100.00%

Com estes factores de desenvolvimento, e considerando que treze anos é um período tão razoável como qualquer outro (pois o que no fundo estou a trabalhar são os primeiros anos após de acidente), apresento uma possível melhor estimativa para as reservas neste ramo de negócio na tabela 3.12.

Tabela 3.12 – Melhor estimativa para o montante de sinistros pagos por período de desenvolvimento (ramo de negócio 3)

Ano de acidente	Montante pago	Prob acumulada	Reservas	Montante total para sinistros
1996	151.994	1,0000	0	151.994
1997	171.247	0,9968	545	171.792
1998	180.327	0,9931	1.252	181.578
1999	174.594	0,9887	1.987	176.581
2000	198.064	0,9836	3.293	201.357
2001	188.244	0,9777	4.297	192.540
2002	182.206	0,9707	5.496	187.703
2003	191.669	0,9626	7.449	199.117
2004	198.505	0,9531	9.763	208.267
2005	181.602	0,9421	11.158	192.760
2006	178.282	0,9293	13.555	191.837
2007	183.567	0,8832	24.277	207.843
2008	135.608	0,5494	111.241	246.850
	2.315.908		194.311	2.510.220

Simultaneamente com a necessidade de um modelo que comporte valores negativos e do facto de só dispor dos dados agrupados desta forma, utilizei o Modelo log-Normal e assim aproveitei para avaliar a aplicabilidade do mesmo. Irei também utilizar o Modelo de Mack para o cálculo das reservas e respectivo erro de previsão.

CAPÍTULO 4 – APLICAÇÃO DOS MODELOS A CADA UM DOS RAMOS DE NEGÓCIO

Após a apresentação de alguns modelos estocásticos existentes na literatura acadêmica e de ter estudado os dados dos três ramos de negócio, parametrizo agora cada um dos modelos.

Desta forma, numa primeira parte, indicarei critérios de ajustamento dos modelos e, nos capítulos subsequentes, a sua aplicação a cada conjunto de dados.

4.1. AVALIAÇÃO DOS MODELOS

4.1.1. MODELOS LINEARES GENERALIZADOS

No Modelo de sobredispersão de Poisson, anteriormente apresentado, têm-se

$\frac{1}{2}N(N+1)$ observações e, conseqüentemente, o mesmo número de resíduos;

no entanto há que ignorar os falsos zeros tanto na aferição do ajustamento do modelo como na reamostragem.

Um dos critérios utilizados para aferir o ajuste do modelo escolhido é feito através dos resíduos de Pearson, estes corrigidos dos graus de liberdade –

espera-se que cerca de 95% destes estejam entre -2 e 2. Outro critério para avaliar o ajustamento do modelo será recorrer à representação gráfica através dos Q-Q *plots*. No entanto, no nosso caso, a dimensão da amostra é muito pequena e, portanto, a distribuição dos resíduos de Pearson facilmente se afasta da distribuição Normal – condição necessária à utilização destes dois critérios –, sem que isso signifique um mau ajuste do modelo.

É ainda aconselhável a construção do gráfico dos resíduos, tanto por ano de acidente como por período de desenvolvimento, bem como dos resíduos *versus* o preditor linear. Em qualquer um destes gráficos espera-se que não se encontrem tendências. Se existirem valores de resíduos bastante diferentes de zero, então o modelo, provavelmente, não será o mais adequado.

4.1.2. MODELOS BAYESIANOS

Em Walsh (2004) e em Scolnik (2001) é possível encontrar critérios de convergência das simulações MCMC. A saber:

- utilização de várias cadeias paralelas (isto implica partir de vários valores iniciais distintos);
- análise gráfica do traço de cada um dos parâmetros (valor do parâmetro *versus* iteração) procurando sinais de estabilização da simulação – quando os valores assumidos pelos parâmetros percorrem indiferenciadamente todo o seu espaço de valores;
- análise do gráfico de autocorrelação de cada um dos parâmetros (valor

da autocorrelação de ordem j versus $\text{lag } j$) – deve-se estar perante um *decay* geométrico, de modo a que a série apresente o comportamento de modelo auto-regressivo de ordem 1.

- utilizar o critério modificado de diagnóstico de convergência de Gelman-Rubin, incluindo a representação gráfica – ao estar perante a convergência da cadeia ele assume o valor 1;
- outras ferramentas disponíveis para aferir a convergência são critérios implementados nos *softwares* CODA (*Convergence Diagnostics and Output Analysis*) e BOA (*Bayesian Output Analysis program*), ambos disponíveis também como subprogramas do *software* R.

Após garantir a convergência, descartam-se essas primeiras iterações (*burn-in*) e simula-se mais outras tantas, agora com a distribuição estacionária. O número de iterações necessário será tal que o erro de Monte Carlo (calculado como a diferença entre o valor esperado dos valores simulados e o valor esperado da distribuição *a posteriori*) seja inferior a 5% do desvio padrão dos valores simulados – estes cálculos deverão ser realizados para cada um dos parâmetros de interesse. Note-se que todos esses valores são fornecidos pelo *software* utilizado.

Relativamente à escolha do melhor modelo para os dados, o *Deviance Information Criterion* (DIC) será uma ótima opção. Este critério pode ser aplicado a modelos hierárquicos, sem que estes tenham necessariamente de estar encaixados, bastando apenas que utilizem o mesmo conjunto de dados. Desta forma, o modelo que tiver o menor valor DIC será aquele que, a curto

prazo, dará melhores previsões – se houver modelos com o valor DIC muito próximo terá de se considerar outros critérios.

4.2. APLICAÇÃO

A todos os modelos foram aplicados os métodos de avaliação apresentados anteriormente.

4.2.1. RAMO DE NEGÓCIO 1

Com base na análise feita no capítulo 3.1. apresenta-se agora a parametrização dos vários modelos neste ramo de negócio.

4.2.1.1. MODELO COM FACTOR DE CAUDA

É necessário arranjar um modelo para projectar os factores de desenvolvimento para além do 13º ano de observações. Com este fim foram consideradas quatro curvas, algumas presentes no trabalho de Sherman (1984):

- Curva inversa: $y = 1 + a(t + c)^{-b}$ (ajustada directamente aos factores de desenvolvimento; considerou-se $c=0$, pois só é necessário ajustar a curva a partir do sétimo período);
- Exponencial: $y = ae^{bt}$ (ajustada aos factores de desenvolvimento subtraídos de 1);

- Logarítmica: $y = a + b \ln t$ (ajustada aos montantes acumulados e depois calculando os respectivos factores de desenvolvimento);
- Decay linear: $y_t = 1 + a(y_{t-1} - 1)$ (modelo recursivo para os factores de desenvolvimento; o valor de a foi ajustado previamente, tomando o valor 0,7).

A cauda foi ajustada a partir do período de desenvolvimento 7; para tal, consideraram-se os valores dos factores de desenvolvimento, nos primeiros seis períodos, idênticos em todos os modelos e idênticos aos factores de desenvolvimento de *chain ladder*, e, a partir do período de desenvolvimento 7, os valores obtidos por cada um dos modelos.

Tabela 4.1 – Comparação dos factores de desenvolvimento para cada uma das funções utilizadas

Período de desenvolvimento	Chain ladder	Curva inversa	Exponencial	Logarítmica	Decay linear
1:2	1,48708	1,48708	1,48708	1,48708	1,48708
2:3	1,07833	1,07833	1,07833	1,07833	1,07833
3:4	1,05556	1,05556	1,05556	1,05556	1,05556
4:5	1,03810	1,03810	1,03810	1,03810	1,03810
5:6	1,03600	1,03600	1,03600	1,03600	1,03600
6:7	1,03131	1,03783	1,03464	0,99047	1,02520
7:8	1,02152	1,02219	1,02280	0,99167	1,01764
8:9	1,01450	1,01386	1,01501	0,99259	1,01235
9:10	1,01189	1,00910	1,00988	0,99332	1,00864
10:11	1,00750	1,00622	1,00651	0,99392	1,00605
11:12	1,00520	1,00439	1,00428	0,99441	1,00424
12:13	1,00203	1,00319	1,00282	0,99483	1,00297
AIC		5,42682	1,45945	921,43950	
a		90,11	0,6464	936470	0,7
b		3,996	-0,4181	-52106	

É possível observar na tabela 4.1 que a função logarítmica prevê factores de desenvolvimento inferiores a 1, o que não interessa. Como medida de

comparação do ajustamento de cada um dos modelos para a cauda utilizou-se o critério de informação de Akaike (*Akaike Information Criterion – AIC*).

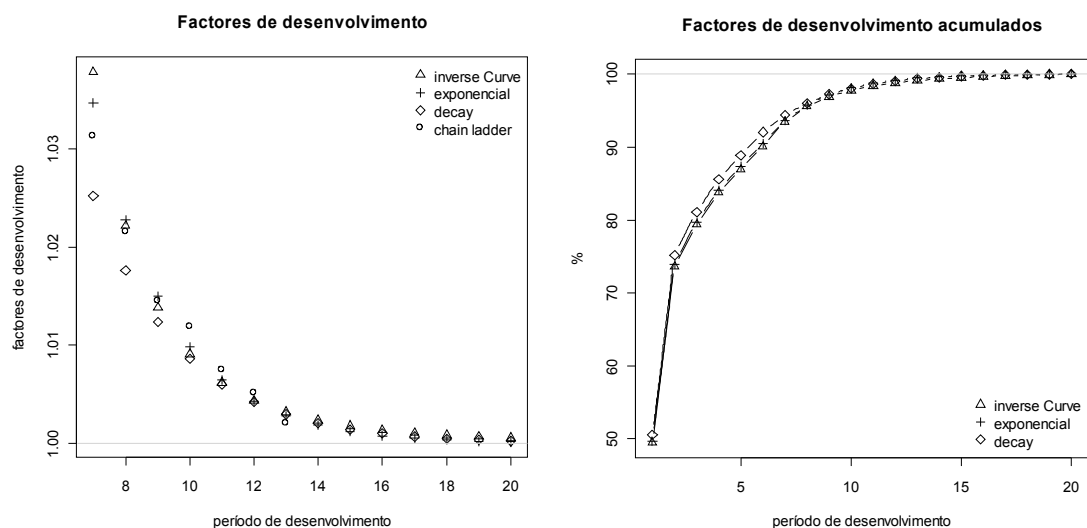


Figura 4.1 – Modelação dos factores de desenvolvimento para a cauda

Complementa-se a análise com uma comparação visual de cada um dos modelos apresentados através dos gráficos da figura 4.1 – estes incluem a projecção.

Utilizando estes dois critérios optou-se pela curva exponencial para a projecção da cauda para além do período observado, de modo a totalizar 20 períodos de desenvolvimento.

Modelados os factores de desenvolvimento para a cauda, faz-se agora as previsões das reservas com o Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1, com o Modelo de Mack e com o Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano).

Para aferir o correcto ajustamento do Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1, utilizaram-se os critérios anteriormente mencionados.

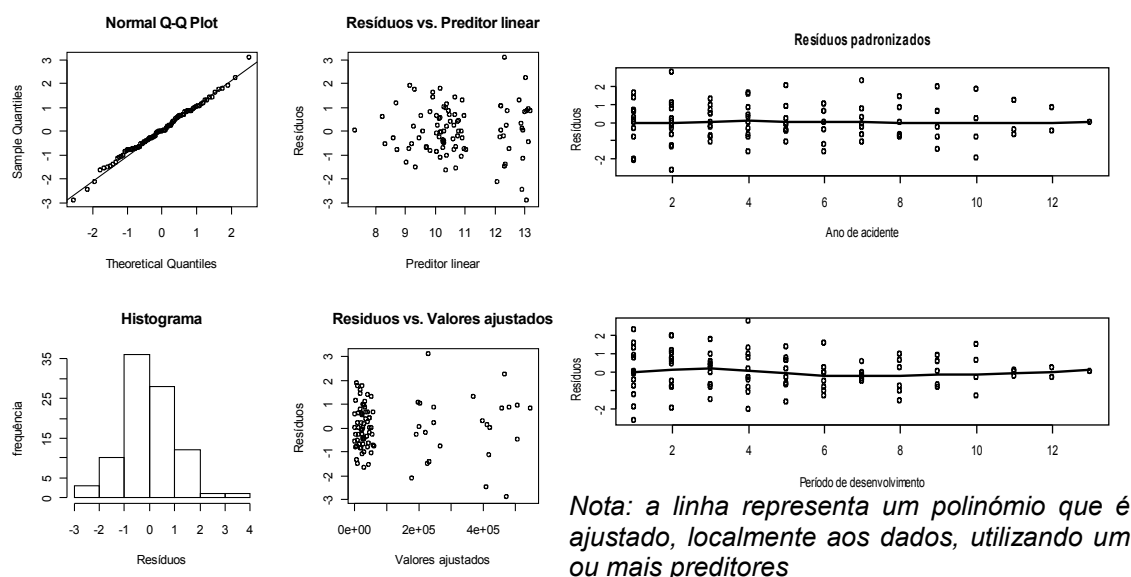


Figura 4.2 – Análise dos resíduos padronizados do modelo de sobredispersão de Poisson

Na figura 4.2, é possível observar o comportamento dos resíduos padronizados do modelo. O parâmetro de escala ϕ estimado foi de 1563,312.

Em seguida, utilizou-se a técnica de *bootstrap*, como previamente descrita, para obter os valores preditivos das reservas e respectivas provisões, assim como o valor esperado e o desvio padrão para o factor de cauda. É de referir que, após a escolha do modelo para a cauda, os seus parâmetros são calculados em cada iteração *bootstrap*.

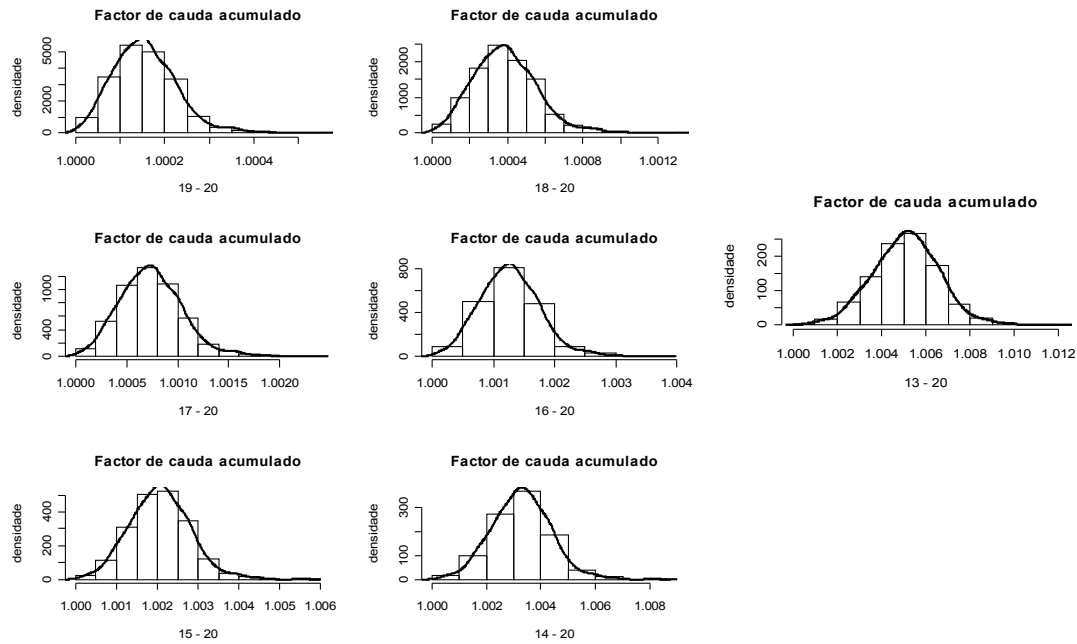


Figura 4.3 – Histograma e densidade empírica dos factores de cauda para diferentes períodos de desenvolvimento

Na figura 4.3 pode observar-se a densidade empírica obtida após a aplicação da técnica de *bootstrap* ao modelo com cauda. O factor de cauda a considerar será o referente ao período de 13 a 20 com o valor de 1,005097 e um erro padrão de 0,001503463.

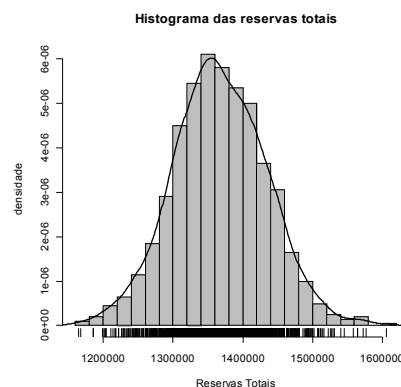


Figura 4.4 – Função distribuição empírica e histograma das reservas totais bootstrap

Na figura 4.4 encontra-se o histograma das reservas totais acompanhado do *rug plot* – que possibilita a visualização de *outliers*.

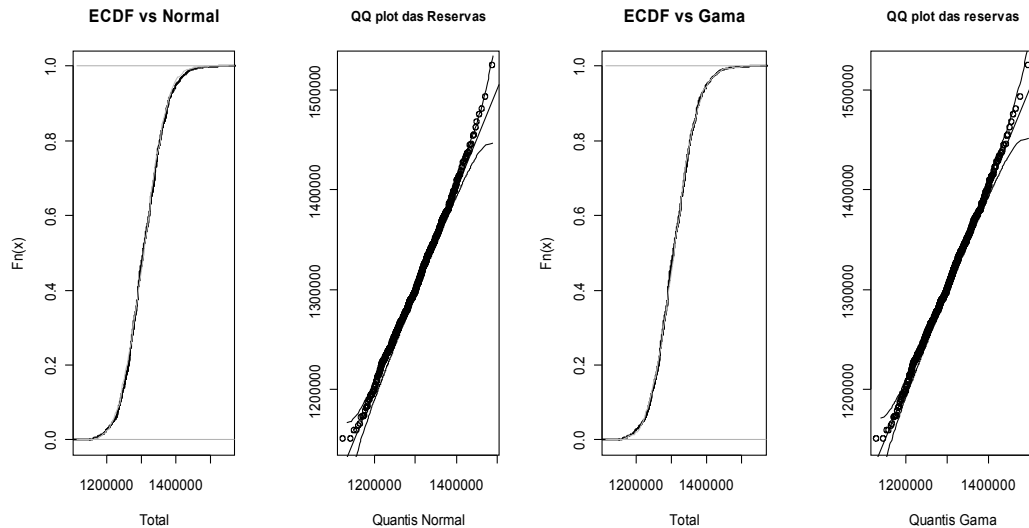


Figura 4.5 – Função distribuição empírica acumulada e Q-Q plot das reservas totais bootstrap

Na figura 4.5 observa-se a função distribuição acumulada empírica (ecdf – *Empirical Cumulative Distribution Function*) e os Q-Q plot – o primeiro com a distribuição Normal e o segundo com a distribuição Gama. Estes gráficos permitem avaliar se a distribuição preditiva das reservas totais poderá aproximar-se da distribuição Normal ou da distribuição Gama. Após a análise dos gráficos apresentados, é possível verificar que a distribuição empírica das reservas totais, supondo que se aproxima da distribuição Gama, tem a aba direita relativamente pesada; perante este facto é aconselhável cuidado aquando da análise da existência de valores extremos da distribuição.

Em relação ao erro de previsão, neste modelo com cauda, utilizou-se o

percentil do erro de previsão (PPE), visto este ser o critério que, por construção, é passível de ser utilizado em modelos com cauda.

Em relação ao Modelo de Mack, os parâmetros de cauda foram escolhidos com base nos resultados da simulação *bootstrap* utilizados no Modelo de sobredispersão de Poisson da seguinte forma:

- o factor de desenvolvimento acumulado da cauda, \hat{f}_{ult} , foi escolhido como a média dos valores do produto dos factores de desenvolvimento dos períodos de desenvolvimento 13 a 20;
- escolheu-se o erro da estimativa \hat{f}_{ult} em relação ao seu verdadeiro valor f_{ult} , $s.e.(\hat{f}_{ult})$, como o erro padrão *bootstrap* de \hat{f}_{ult} ;
- o erro médio de cada $F_{i,ult}$ em relação a f_{ult} , foi escolhido de modo a que $s.e.(F_{i,10}) > s.e.(F_{i,ult}) > s.e.(F_{i,11})$, já que a mesma relação se tinha para $s.e.(\hat{f}_{ult})$.

Os valores são os seguintes:

$$\begin{aligned}\hat{f}_{ult} &= 1,005097 \\ s.e.(\hat{f}_{ult}) &= 0,001503463 \\ s.e.(\hat{F}_{i,ult}) &= 0,002 \Rightarrow \hat{\sigma}_{ult} = s.e.(\hat{F}_{i,ult}) \cdot \hat{D}_{i,13} = 1,83276\end{aligned}$$

Os montantes necessários para provisões para sinistros, neste modelo, foram calculados como o limite superior do intervalo de confiança a 97,5%, tendo por base o erro de previsão.

No Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano), todos os parâmetros são estimados simultaneamente; isto tem como consequência que as distribuições *a priori* escolhidas irão afectar a estimação de todos os parâmetros – implica que os parâmetros de coluna não serão exactamente os mesmo do modelo determinístico de *chain ladder*. Consciente deste facto, escolheram-se distribuições *a priori* impróprias para os parâmetros de coluna, tendo o modelo sido parametrizado da seguinte forma:

- o valor esperado do parâmetro de linha idêntico às previsões do método determinístico de *chain ladder* para o montante total desse ano de acidente;
- o desvio padrão para a distribuição dos parâmetros de linha muito pequeno e idêntico para todos os anos de acidente, de modo a indicar a nossa confiança nas previsões do modelo determinístico;
- o parâmetro de escala é introduzido no modelo com o valor de 1563,312 (previamente obtido no ajustamento do modelo através dos MLG).
- utilização de um factor de cauda com distribuição Gama deslocada (da forma $1+Gama$) com parâmetros tais que o valor esperado seja 1,005097 e o desvio padrão 0,001503463 – estes valores são escolhidos de forma análoga à do Modelo de Mack;
- na simulação considereirei três cadeias, ignorei as primeiras três mil amostras e, para a distribuição preditiva das reservas, considereirei as quinze mil amostras seguintes.

Neste modelo, tem-se a distribuição preditiva das reservas e, portanto, as provisões são dadas pelo percentil 97,5 da distribuição.

Na tabela 4.2, encontram-se as reservas obtidas para cada um dos modelos considerados, bem como as provisões a 97,5%.

Tabela 4.2 – Reservas e provisões para sinistros dos modelos com cauda

Ano	ODP	ODP - Bayesiano		Mack		ODP - Bootstrap	
	Reservas	Reservas	Provisões (97,5%)	Reservas	Provisões (97,5%)	Reservas	PPE (97,5%)
1996	3.819	3.798	6.288	3.779	7.566	3.772	3.819
1997	5.900	5.774	14.326	5.857	10.626	5.867	9.169
1998	10.361	10.181	23.004	10.316	16.300	10.428	19.306
1999	18.705	18.623	36.103	18.655	27.855	18.951	30.012
2000	31.866	31.681	53.692	31.812	47.286	32.291	48.977
2001	42.439	42.077	66.971	42.389	60.920	42.808	61.836
2002	60.013	59.727	88.182	59.964	80.890	60.439	82.801
2003	95.537	95.279	131.003	95.483	121.121	96.172	128.185
2004	137.985	137.826	179.711	137.927	168.716	138.796	173.208
2005	152.428	152.060	196.303	152.377	183.964	152.944	188.939
2006	167.815	167.553	212.937	167.772	201.169	168.422	206.860
2007	209.035	208.831	258.612	208.993	245.541	209.443	252.410
2008	425.888	425.798	495.343	425.843	525.540	426.717	477.282
Total	1.361.790	1.359.209	1.527.788	1.361.166	1.518.513	1.367.052	1.498.129

Verifica-se, que o montante previsto para as reservas é praticamente o mesmo em todos os modelos, parecendo-me as diferenças encontradas justificadas pelo facto de se trabalhar com técnicas de simulação. Em relação às provisões, os valores já são bastante díspares; o modelo bayesiano é, entre todos, aquele que, no geral, apresenta provisões mais elevadas.

4.2.1.2. MODELO COM PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL

Aborda-se agora a utilização do parâmetro de escala variável no Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1.

Como foi referido, é possível permitir que o parâmetro de escala dependa do período de desenvolvimento k . Este facto pode levantar a questão de os resíduos utilizados continuarem a ser independentes e identicamente

distribuídos (i.i.d.) – condição essencial para a aplicação da técnica de *bootstrap*; England e Verrall (2006) utilizam-os, sem, no entanto, justificarem que os resíduos são i.i.d.. No livro de Davison & Hinkley (1999), os resíduos de Pearson padronizados são apresentados como

$$r_{P_j} = \frac{y_j - \hat{\mu}_j}{\sqrt{c_j \hat{\kappa} V(\hat{\mu}_j)(1 - h_j)}}$$

em que $\hat{\kappa}$ é o parâmetro de escala estimado e c_j os pesos da variável aleatória Y_j . Desta forma, é possível considerar o parâmetro de escala como sendo $c_j \hat{\kappa}$. A estimação dos parâmetros do modelo, $\hat{\beta}$, não depende do parâmetro de escala, os seus valores dependem unicamente da relação estabelecida pela função variância, da função *link* e da escolha das covariâncias.

Quando se opta por considerar o parâmetro de escala diferente para cada coluna, ϕ_k , este será calculado como apresentado na secção 2.4.1.3.,

utilizando a expressão $\hat{\phi}_k = \frac{n}{n-p} \times \frac{\sum_{i=1}^{n_k} (r_{ik}^{(PS)})^2}{n_k}$, onde n representa o número de

observações, p o número de parâmetros, n_k o número de observações da coluna k e $r_{ik}^{(PS)}$ os resíduos de *Pearson* padronizados. Como para o último período de desenvolvimento se sobreparametriza o modelo – visto existir uma só observação para a estimação de dois parâmetros, sendo um deles o parâmetro de escala –, England e Verrall (2006) contornam esta situação definindo o parâmetro de escala do último período como o mínimo dos parâmetros de escala dos dois períodos exactamente anteriores, opção tomada

no presente trabalho. Se se quiser estender o cálculo do parâmetro de escala a situações em que é utilizada uma cauda, é possível ajustar um modelo aos parâmetros de escala, à semelhança dos factores de desenvolvimento, ou pode supor-se que, nesses períodos, o valor é idêntico ao do último período de desenvolvimento, como utilizado na Allianz Portugal.

Uma última nota em relação ao parâmetro de escala variável: é necessário ter todo o cuidado na aplicação dos algoritmos para o cálculo do erro de previsão, que tomará, no Modelo de sobredispersão de Poisson, a forma

$$PE_{bs}(R_i) = \sqrt{\sum_{k=N-i+2}^N \hat{\phi}_k \hat{C}_{ik} + \frac{n}{n-p} (SE_{bs}(\hat{R}_i))^2}, \quad i=2, \dots, N.$$

Tabela 4.3 – Valores para o parâmetro de escala variável

	Período de desenvolvimento												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Parâmetro de escala	1.889	2.709	889	1.382	1.150	1.389	1.254	1.246	2.114	2.418	962	357	357

Os valores para o parâmetro de escala obtidos no ajustamento do modelo encontram-se na tabela 4.3. Recorde-se que o valor para o parâmetro constante é cerca de 1.563.

Tabela 4.4 – Aplicação do parâmetro de escala variável aos dados

Ano	Modelo de Mack			MLG - Sobredispersão de Poisson			Bootstrap - Sobredispersão de Poisson		
			EP(R _i)/R _i %	Parâmetro de escala fixo		Parâmetro de escala variável	Parâmetro de escala fixo		Parâmetro de escala variável
	Reservas	EP(R _i)/R _i %		Reservas	EP(R _i)/R _i %		Reservas	EP(R _i)/R _i %	
1996	0	n.a.		0	n.a.	n.a.	0	n.a.	0
1997	1.667	76,3%		1.666	140,8%	67,5%	1.669	97,0%	1.670
1998	6.036	37,7%		6.035	66,7%	32,2%	6.135	62,0%	6.024
1999	13.823	29,5%		13.823	42,7%	27,3%	13.951	42,0%	13.786
2000	26.624	28,1%		26.624	29,9%	27,6%	26.782	30,0%	26.525
2001	37.606	24,3%		37.605	24,3%	24,4%	37.711	25,0%	37.494
2002	55.290	18,8%		55.289	19,7%	19,3%	55.460	20,0%	55.102
2003	90.301	14,2%		90.301	15,5%	14,9%	90.548	16,0%	90.074
2004	132.329	11,7%		132.328	13,0%	12,5%	132.575	14,0%	131.849
2005	147.457	10,8%		147.457	12,2%	11,7%	147.477	13,0%	146.855
2006	163.548	10,3%		163.547	11,7%	11,3%	163.858	12,0%	163.116
2007	204.908	9,0%		204.907	10,7%	10,2%	205.217	11,0%	204.342
2008	421.541	12,0%		421.541	9,0%	10,0%	421.746	7,0%	421.296
Total	1.301.130	5,97%		1.301.122	6,00%	5,70%	1.303.128	6,00%	1.298.133

Nas duas primeiras colunas da tabela 4.4 apresento os resultados obtidos por aplicação do Modelo de Mack, cujas previsões para as reservas coincidem com o Modelo de sobredispersão de Poisson (3ª coluna) – as pequenas diferenças devem-se a arredondamentos. Relativamente aos valores obtidos, recorrendo à simulação (6ª e 8ª colunas), estes são ligeiramente diferentes devido ao facto de se trabalhar com simulações. Mas o relevante não é a comparação dos valores preditos das reservas, mas sim o erro associado, visto ser neste que o parâmetro de escala intervém.

É interessante notar que, percentualmente, o erro de previsão do Modelo de Mack se assemelha ao do Modelo de sobredispersão de Poisson com parâmetro de escala variável. As maiores diferenças entre os modelos, relativamente ao erro de previsão, verificam-se nos primeiros anos de acidente, em que, nos casos em que o parâmetro é variável, o erro de previsão, como percentagem das reservas, é menor. No entanto, este facto parece não ser relevante no erro de previsão para a totalidade do montante das reservas, que é praticamente de 6% em todas as situações.

4.2.1.3. MODELO COM FACTOR DE CAUDA E PARÂMETRO DE ESCALA VARIÁVEL

Conjugando agora o cenário em que se considera o modelo com cauda com o do parâmetro de escala variável, trabalhei o Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1 e o Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano).

O modelo considerado para a cauda, assim como os valores obtidos para o parâmetro de escala, são idênticos aos das secções anteriores. Na figura 4.6 encontra-se a representação gráfica dos resíduos padronizados do modelo.

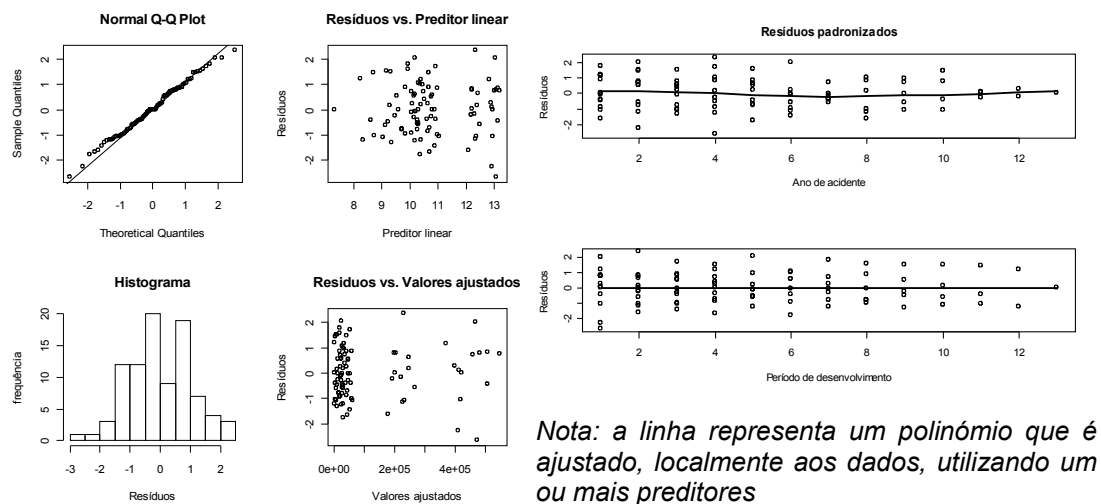


Figura 4.6 – Análise dos resíduos padronizados do Modelo de sobredispersão de Poisson com parâmetro de escala variável

Em relação ao factor de cauda, este apresentou um valor de 1,005105 e desvio padrão amostral de 0,0008422949. Na figura 4.7 encontram-se os histogramas e respectivas densidades empíricas.

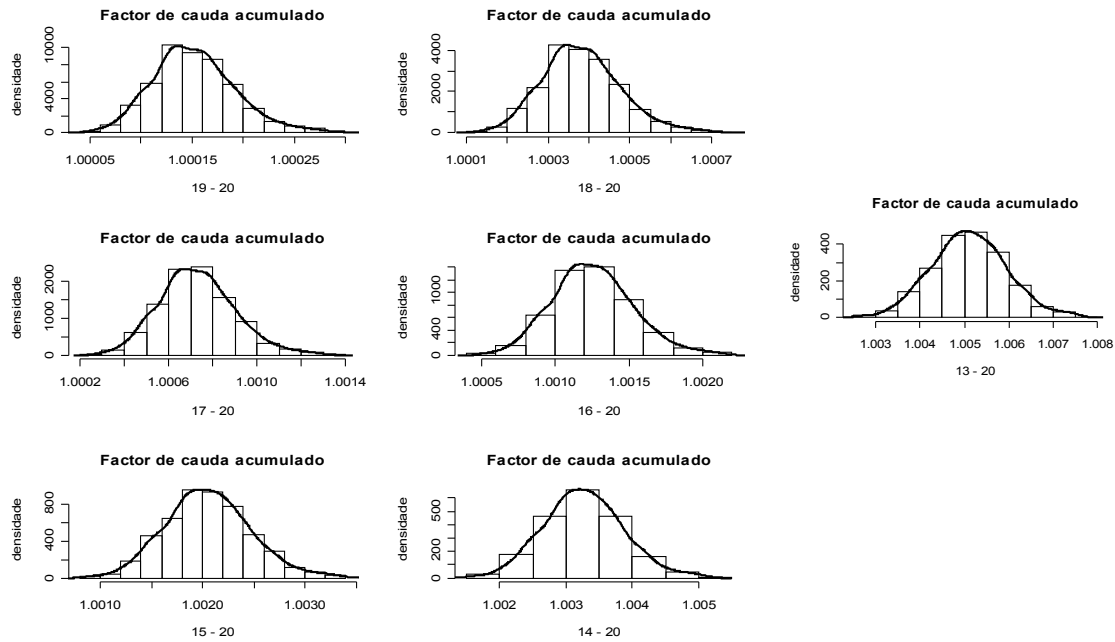


Figura 4.7 – Histograma e densidade empírica dos factores de cauda para diferentes períodos de desenvolvimento

Analisando, agora, as reservas totais no final de 20 anos de desenvolvimento, apresenta-se o histograma e a densidade empírica na figura 4.8.

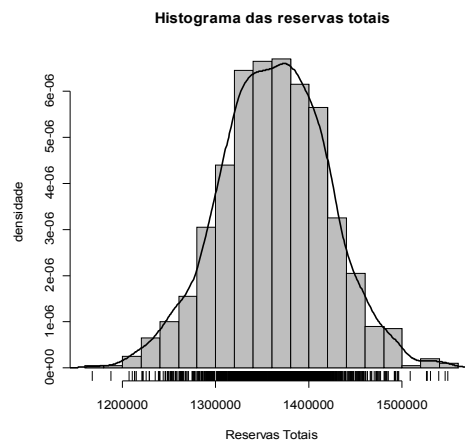


Figura 4.8 – Histograma das reservas totais bootstrap

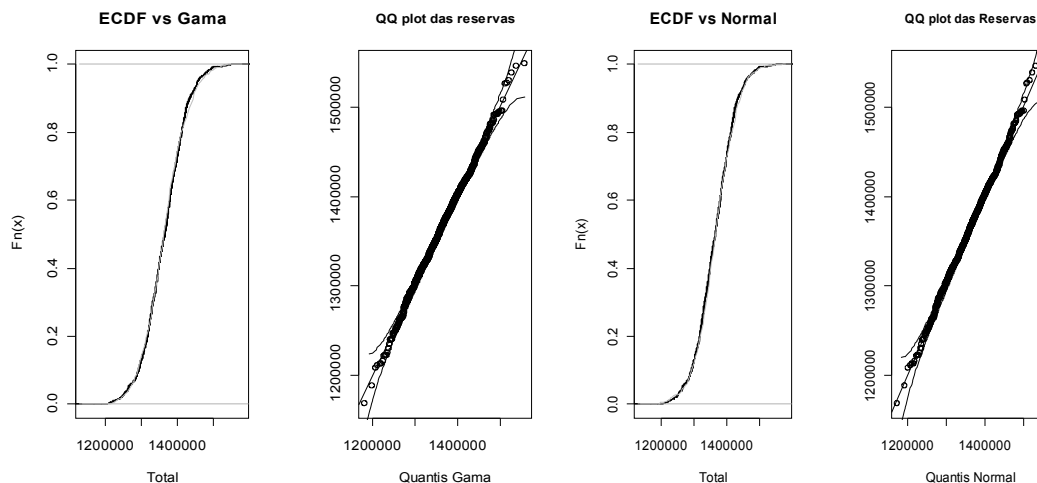


Figura 4.9 – Função distribuição acumulada empírica e Q-Q plot das reservas totais bootstrap

Através dos gráficos da figura 4.9 e comparando com as distribuições Normal e Gama, em qualquer uma delas, a distribuição empírica apresenta uma aba direita ligeiramente mais pesada mas ainda dentro do intervalo de 95%.

À semelhança do estudo anterior com factor de cauda, utilizou-se o percentil do erro de previsão (PPE) para aferir o erro de previsão.

Relativamente ao Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano), a sua parametrização é similar à apresentada anteriormente. Desta forma, temos que o parâmetro de escala tem uma distribuição Gama; quanto ao factor de cauda, este tem distribuição Gama deslocada de valor esperado 1,005105 e desvio padrão 0,0008422949. O valor esperado do parâmetro de linha é idêntico à melhor estimativa dada para os dados do montante total desse ano de acidente. Ainda na parametrização do modelo considerei como montante total para sinistros a minha melhor estimativa. Quanto à simulação considerei três

cadeias e ignorei as primeiras três mil amostras e, para a distribuição preditiva das reservas, as quinze mil amostras seguintes.

Tabela 4.5 – Reservas e provisões para sinistros dos modelos com cauda e parâmetro de escala variável

Ano	ODP	ODP - Bayesiano		Mack		ODP - Bootstrap	
	Reservas	Reservas	Provisões (97,5%)	Reservas	Provisões (97,5%)	Reservas	PPE (97,5%)
1996	3.819	3.793	5.106	3.785	7.112	3.781	3.819
1997	5.900	5.799	12.274	5.863	10.190	5.879	7.951
1998	10.361	10.229	19.509	10.323	15.945	10.375	22.568
1999	18.705	18.614	31.507	18.662	27.567	18.659	51.415
2000	31.866	31.670	48.774	31.820	47.094	31.897	125.457
2001	42.439	42.236	61.274	42.396	60.785	42.401	160.055
2002	60.013	59.799	81.856	59.972	80.777	59.895	192.423
2003	95.537	95.471	122.392	95.491	121.009	95.884	252.865
2004	137.985	137.622	170.324	137.935	168.608	138.127	339.826
2005	152.428	152.165	186.605	152.385	183.884	152.286	423.197
2006	167.815	167.450	202.468	167.778	201.115	168.015	426.604
2007	209.035	208.800	248.397	208.999	245.495	209.500	462.475
2008	425.888	425.914	481.238	425.850	525.526	425.898	797.782
Total	1.361.790	1.359.560	1.493.675	1.361.260	1.515.959	1.362.596	2.016.722

Analisando os valores da tabela 4.5, as reservas voltam a ser bastante similares nos três modelos, no entanto, relativamente às provisões, o Modelo de sobredispersão de Poisson complementado com a técnica de *bootstrap*, apresenta valores significativamente mais altos.

4.2.1.4. MODELO QUE INCORPORA INFORMAÇÃO EXTERNA NOS FACTORES DE DESENVOLVIMENTO

Apresenta-se agora, de forma sucinta, a aplicação do Modelo Binomial Negativa (bayesiano) a este ramo de negócio, de modo a ser abordada a situação em que existe uma alteração da política da companhia nos últimos seis anos.

Na prática, basta optar, no primeiro nível hierárquico do Modelo Binomial Negativa (bayesiano), por $\lambda_{ik} = \lambda_k$ para $i = 13 - k - 5, \dots, 13 - k + 1$ e $\lambda_{ik} = \lambda_k^*$ para $i = 1, 2, \dots, 13 - k - 6$, $k = 1, \dots, 13$; e no segundo nível

$\lambda_k - 1 \sim LN(0.5, 1.0E-6)$ para $i = 13 - k - 5, \dots, 13 - k + 1$ e

$\lambda_k^* - 1 \sim LN(0.5, 1.0E-6)$ para $i = 1, 2, \dots, 13 - k - 6$, $k = 1, \dots, 13$, isto é,

separa-se os dados em dois.

Tabela 4.6 – Montante das reservas e respectivo intervalo de confiança com alteração de política nos últimos seis anos

Ano	Modelo BN - Bayesiano		Modelo de Mack	
	Reservas (intervalo a 97,5%)	EP(%)	Reservas (intervalo a 97,5%)	EP(%)
1996	0	n.a.	0	n.a.
1997	1.657 0 8.293	141,3%	1.667 -826 4.159	76,3%
1998	6.011 689 15.770	66,4%	6.036 1.576 10.495	37,7%
1999	13.780 4.573 27.470	43,0%	13.823 5.826 21.820	29,5%
2000	26.580 13.220 44.080	29,8%	26.624 11.958 41.291	28,1%
2001	37.600 21.800 57.410	24,4%	37.606 19.707 55.505	24,3%
2002	55.280 35.940 78.290	19,6%	55.341 34.922 75.761	18,8%
2003	88.520 63.700 117.800	15,7%	87.535 65.050 110.020	13,1%
2004	130.700 99.260 166.500	13,2%	128.947 101.762 156.131	10,8%
2005	144.400 111.100 181.500	12,4%	142.921 116.501 169.340	9,4%
2006	159.300 124.400 198.600	11,9%	158.892 131.458 186.326	8,8%
2007	195.300 155.100 240.100	11,1%	196.169 168.959 223.379	7,1%
2008	397.800 328.700 474.000	9,3%	398.388 365.426 431.349	4,2%
Total	1.257.000 1.113.000 1.416.000	6,2%	1.253.948 1.141.939 1.365.957	4,6%

Como, com os modelos bayesianos, se obtém a distribuição preditiva das reservas, o intervalo de confiança de 97,5% é dado directamente pelo percentil 2,5 e 97,5, respectivamente, da distribuição – estes resultados são automaticamente fornecidos pelo *software* utilizado. Na tabela 4.6 apresentam-se os montantes para as reservas e o respectivo intervalo de confiança. No caso do Modelo de Mack recorreu-se, a título comparativo, ao intervalo de confiança supondo que a distribuição se aproxima da Normal e obtiveram-se alguns valores negativos que não têm qualquer sentido.

Aqui, é clara a vantagem da utilização dos modelos bayesianos, já que, ao ter a distribuição preditiva para as reservas, têm-se os intervalos de confiança como medida de risco – no sentido em que, se a distribuição tiver uma cauda pesada, esse comportamento reflecte-se nos valores do intervalo de confiança.

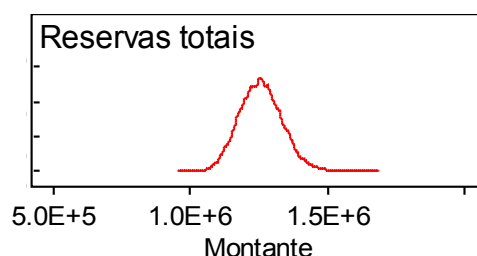


Figura 4.10 – Distribuição a posteriori do montante total das reservas

A título de exemplo, apresenta-se a distribuição preditiva do total das reservas na figura 4.10. É possível ver que a aba direita é ligeiramente pesada.

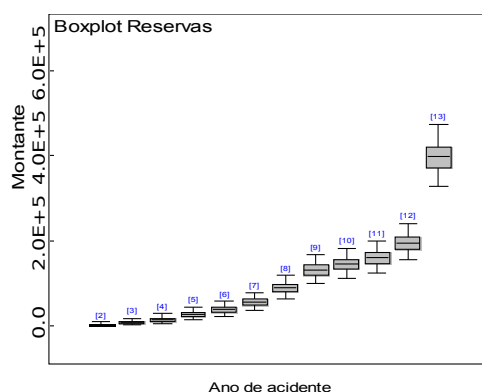


Figura 4.11 – Boxplot das reservas por ano de acidente

A figura 4.11 mostra a representação em *boxplot* da distribuição das reservas por ano de acidente.

4.2.1.5. CONCLUSÃO PARA O RAMO DE NEGÓCIO 1

Após a aplicação dos vários métodos, e não tendo eu informação suficiente

para corroborar as alterações na política da empresa nos últimos seis anos, terei de excluir, como escolha para a determinação das reservas, os modelos que contemplam este cenário. Sendo este um ramo de negócio que necessita de um período superior a 13 anos para se verificar a regularização dos sinistros, irei optar por um modelo com cauda. Comparando agora os modelos através da distribuição empírica, tem-se que, nos modelos com parâmetro de escala variável, as reservas são, em geral, inferiores à dos que têm o parâmetro fixo, no entanto, o percentil 97,5 é bastante superior. Neste ponto considero mais prudente escolher modelos cujas provisões são ligeiramente maiores e, posteriormente, trabalhar os valores extremos, do que tomar reservas inferiores e ter uma distribuição empírica com abas bastante mais pesadas. Os resultados obtidos pelo Modelo de Mack são mais parecidos com os dos modelos com parâmetro de escala variável, o que pelas razões atrás referidas não considerarei. Relativamente à abordagem, o Modelo de sobredispersão de Poisson na vertente bayesiana aparenta não ser tão influenciável pela utilização do parâmetro de escala variável como o do contexto dos MLG. É possível que este facto se deva à natureza da abordagem bayesiana, assim como da fragilidade dos resíduos quando da reamostragem *bootstrap*.

Todos estes factos levam-me a propor para as reservas e respectivas provisões, os valores obtidos pelo Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano) com o parâmetro de escala fixo – de facto este modelo apresenta o valor do DIC inferior ao do parâmetro de escala variável.

Baseada na melhor estimativa e na distribuição empírica das reservas (esta

dada pelo modelo escolhido), apresento na tabela 4.7 as reservas escalonadas para o ramo de negócio 1. Este escalonamento consiste num ajustamento da reserva do modelo à melhor estimativa, já que esta não é coincidente com as reservas obtidas por este. É feito do seguinte modo: o valor médio obtido pelo modelo passa a tomar o valor da melhor estimativa e mantém-se o quociente entre o erro de previsão e o montante da reserva (na prática aos valores obtidos pelo modelo é aplicado o factor resultante do quociente entre a melhor estimativa e a reserva), para cada ano de acidente assim como para o total.

Tabela 4.7 – Reservas para o ramo de negócio 1

Ano de acidente	Ramo de negócio 1								
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro padrão Reservas	$EP(R_{ij})/R_{ij} \%$	Reservas (50%)	Reservas (75%)	Reservas (90%)	Reservas (95%)	Reservas (97,5%)
1996	747.507	6.025	1.773	29,4%	5.843	7.120	8.369	9.220	9.977
1997	830.072	9.713	5.260	54,2%	8.285	11.562	16.227	20.162	24.099
1998	848.024	14.310	7.426	51,9%	12.893	18.254	24.250	28.232	32.334
1999	957.258	23.176	9.624	41,5%	22.089	28.954	36.162	40.796	44.928
2000	1.026.731	35.503	11.441	32,2%	34.648	42.712	50.707	55.462	60.170
2001	947.331	46.577	12.925	27,7%	45.790	54.808	63.611	69.427	74.133
2002	926.116	64.421	14.699	22,8%	63.729	73.793	83.599	89.929	95.111
2003	1.026.738	100.424	18.313	18,2%	99.780	112.538	124.421	131.687	138.077
2004	1.107.990	142.041	21.288	15,0%	141.501	156.080	169.914	178.150	185.207
2005	972.926	155.116	22.010	14,2%	154.403	169.402	183.909	192.992	200.249
2006	831.704	166.561	21.885	13,1%	165.967	180.790	194.848	203.863	211.677
2007	802.503	205.933	24.238	11,8%	205.265	221.963	237.305	247.249	255.022
2008	831.155	408.709	33.486	8,2%	408.170	431.045	452.482	465.011	475.462
Total	11.856.055	1.378.509	Total	6,11%	1.376.796	1.433.584	1.487.432	1.521.178	1.549.482

Neste ponto seria interessante poder comparar esta opção com a praticada pela empresa, mas tal não foi possível.

4.2.2. RAMO DE NEGÓCIO 2

Na estimação das provisões neste ramo de negócio utiliza-se o Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1. Apesar das restrições deste modelo, pelo facto de só se utilizar os seis últimos anos de acidente (como mencionado em 3.2.) deixa de ser impeditiva a sua utilização.

Considerou-se o parâmetro de escala igual para todos os períodos de desenvolvimento. Calcularam-se as reservas e o erro de previsão e, simultaneamente, efectuou-se o cálculo das reservas Bornhuetter-Ferguson (este com base no prémio de risco e nos factores de desenvolvimento de *chain ladder*).

Tabela 4.8 – Reservas para o ramo de negócio 2 e erro de previsão associado com o Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1 e com Bornhuetter-Ferguson

Ano	Reservas ODP	Erro previsão Reservas	EP(R _i)/R _i %	Reservas B-F
2003	0	0	n.a.	0
2004	23	208	908,4%	56
2005	669	944	141,2%	2.043
2006	1.722	1.567	91,0%	3.956
2007	3.649	2.191	60,0%	9.231
2008	59.947	10.751	17,9%	105.363
Total	66.010	11.638	17,6%	120.649

Na tabela 4.8 encontram-se as reservas obtidas por estes dois métodos – relembra-se que o Modelo de sobredispersão de Poisson obtém as mesmas previsões que o modelo determinístico de *chain ladder*, desde que este seja aplicado sem qualquer intervenção da parte do actuário.

Para estes dados o parâmetro de escala obtido foi de 903,0146.

De seguida aplicou-se a metodologia *bootstrap* ao Modelo de sobredispersão de Poisson bem como ao cálculo das reservas Bornhuetter-Ferguson.

Tabela 4.9 – Reservas simuladas com a técnica de bootstrap

Ano	Reservas ODP	Erro previsão Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %	Reservas B-F	$sd(Rbf_i)/Rbf_i$ %
2003	0	0	n.a.	0	n.a.
2004	23	145	623,4%	58	11,0%
2005	759	1.071	141,2%	2.334	59,7%
2006	1.904	1.794	94,2%	4.398	42,3%
2007	3.714	2.483	66,9%	9.455	28,7%
2008	60.060	11.252	18,7%	105.260	6,3%
Total	66.461	12.476	18,8%	121.504	7,8%

Como é possível constatar, não existem diferenças significativas entre o erro de previsão teórico e o obtido através da simulação. É de realçar que, para o ano de acidente de 2004, a percentagem do erro de previsão, quando se utiliza a simulação, é consideravelmente inferior. Relativamente às reservas Bornhuetter-Ferguson utilizou-se o erro padrão *bootstrap* como medida de erro para a estimativa das mesmas. Os valores obtidos por Bornhuetter-Ferguson são, por vezes, mais do dobro do de sobredispersão de Poisson, mas aquele apenas se baseia no prémio de risco e nos factores de desenvolvimento de *chain ladder*, sem fazer, como muitas vezes é apresentado, qualquer ponderação sob a forma de modelo de credibilidade.

Faz-se agora uma breve comparação entre as medidas de erro disponíveis para o cálculo das provisões tendo por base o Modelo de sobredispersão de Poisson.

Tabela 4.10 – Comparação das provisões para sinistros utilizando várias medidas para o ramo de negócio 2

Ano	Upper (97,5%)	PPE (97,5%)	SEP (97,5%)
2003	0	0	0
2004	430	279	307
2005	2.519	3.484	2.769
2006	4.794	5.279	5.237
2007	7.943	8.348	8.517
2008	81.019	78.258	82.000
Total	88.820	84.679	90.463

Na tabela 4.10, compara-se as provisões obtidas pelo limite superior do intervalo de confiança utilizando o erro de previsão teórico (Upper), pelo percentil do erro de previsão (PPE) e pelo limite superior do intervalo de confiança, com o erro de previsão obtido por simulação (SEP), tudo isto a 97,5%. É notório que o SEP (97,5%) apresenta valores superiores às outras duas medidas. O Upper (97,5%) é o que apresenta valores menores, no entanto, esta medida baseia-se no facto de a distribuição das reservas ser aproximadamente Normal e nada nos garante este pressuposto. Assim, tanto pelos valores preditos como pela forma como é calculado, o PPE aparenta ser o melhor método para o cálculo das provisões.

A título comparativo, deixa-se os montantes para as reservas quando aplicado o Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano) a estes dados.

Tabela 4.11 – Reservas para o ramo de negócio 2 e erro de previsão associado com o Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano)

Ano	Modelo ODP - Bayesiano	
	Reservas	EP(%)
2003	0	n.a.
2004	88	509,2%
	0 1.153	
2005	764	145,1%
	0 3.691	
2006	1.873	94,8%
	0 6.285	
2007	3.930	63,7%
	0 9.886	
2008	60.120	14,5%
	43.830 77.990	
Total	66.770	15,0%
	48.410 87.650	

Na tabela 4.11, encontram-se as previsões dadas pelo modelo bayesiano, com

os respectivos intervalos de confiança e percentagem do erro de previsão relativa às reservas.

Passando à modelação dos dados sob a forma de trapézio, é possível aplicar o Modelo de sobredispersão de Poisson, tanto no contexto dos MLG como bayesiano, já que a forma como foi escolhido o trapézio garante que a soma das colunas seja positiva, assegurando a aplicabilidade do modelo.

Da aplicação do Modelo de sobredispersão de Poisson (MLG) – modelo 1 obteve-se as reservas cuja representação gráfica está presente na figura 4.12.

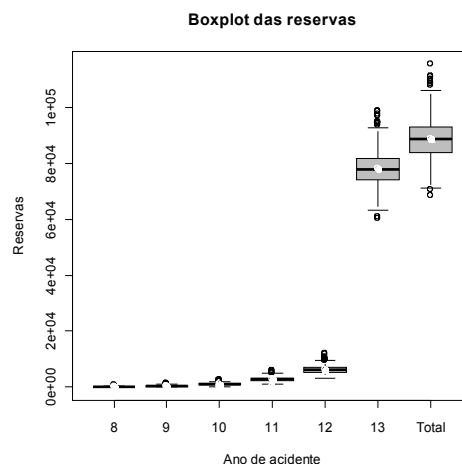


Figura 4.12 – Boxplot das reservas por ano de acidente para o modelo de sobredispersão de Poisson no contexto dos MLG para o ramo de negócio 2

Verifica-se que, para o último ano de acidente e para o total das reservas, existem bastantes *outliers*, principalmente na aba direita.

Aplicando o Modelo de sobredispersão de Poisson (bayesiano) ao mesmo

conjunto de dados, podemos observar na figura 4.13 a distribuição das reservas totais.

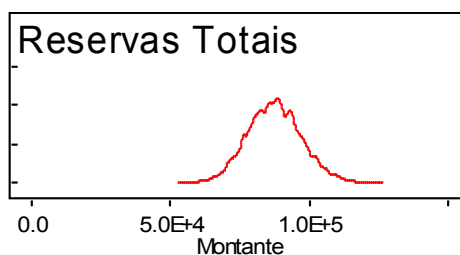


Figura 4.13 – Distribuição das reservas totais no modelo no contexto bayesiano

À semelhança do modelo no contexto dos MLG, a reserva total apresenta uma aba direita ligeiramente mais pesada.

Tabela 4.12 – Provisões para sinistros do Modelo de sobredispersão de Poisson para o ramo de negócio 2 com os dados sob a forma de trapézio

Ano	Bootstrap		Bayesiano	
	Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %	Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %
1996	0	n.a.	0	n.a.
1997	0	n.a.	0	n.a.
1998	0	n.a.	0	n.a.
1999	0	n.a.	0	n.a.
2000	0	n.a.	0	n.a.
2001	0	n.a.	0	n.a.
2002	0	n.a.	0	n.a.
2003	177	249,3%	119	292,6%
2004	405	165,6%	292	190,8%
2005	1.089	103,9%	967	102,3%
2006	2.763	68,8%	2.547	63,7%
2007	6.215	47,0%	6.029	41,0%
2008	78.039	14,3%	77.590	11,4%
Total	88.688	13,8%	87.550	10,9%

Comparando as duas metodologias, MLG e bayesiana, através dos montantes para as reservas e respectivos erros de previsão que se encontram na tabela 4.12, estas são um pouco diferentes. A diferença é mais significativa quando

se verifica que o erro de previsão no modelo bayesiano é 10,9% enquanto que no modelo *bootstrap* é 13,8% das reservas.

A diferença entre as duas metodologias já se havia verificado quando se considerou apenas os últimos seis anos de acidente.

O facto de se considerar mais dados permite que o erro de previsão – como percentagem das reservas – seja consideravelmente inferior: 5% para o *bootstrap* e 4,1% no caso bayesiano. As reservas subiram 22.226 no caso do *bootstrap* e 20.780 no caso bayesiano.

A abordagem considerada será mais realista se os dados disponíveis para os anos anteriores a 2003 forem fiáveis, pois desta forma estes intervêm na estimação dos parâmetros do modelo. Se, por outro lado, os dados que foram excluídos, ao considerar-se unicamente os seis últimos anos de acidente, não forem relevantes ou se até forem discordantes com a actual realidade da companhia, será preferível a primeira abordagem.

Aplica-se agora o Modelo de Mack ao cálculo das provisões neste ramo de negócio seguindo três estratégias:

- utilizar só a informação referente aos anos de acidente a partir de 2003;
- de todos os dados disponíveis excluir uma das observações, neste caso a do ano de acidente de 1997 e período de desenvolvimento 10, referente ao recebimento num período muito tardio, com o objectivo de não permitir que esse comportamento tão extremo influencie os anos seguintes;

- utilizar a totalidade da informação disponível como ponto de comparação para as restantes.

Este é o único modelo estudado que permite a utilização da totalidade dos dados.

Tabela 4.13 – Reservas e erro de previsão para o Modelo de Mack no ramo de negócio 2, sob vários cenários

Ano	Ramo de negócio 2 - seis últimos anos				Ramo de negócio 2 - todos os anos s/ obs de 1997 dev 10				Ramo de negócio 2 - todos os anos			
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro previsão Reservas	EP(R _i)/R _i %	Montante total para sinistros	Reservas	Erro previsão Reservas	EP(R _i)/R _i %	Montante total para sinistros	Reservas	Erro previsão Reservas	EP(R _i)/R _i %
1996	42.076	0	0	n.a.	42.076	0	0	n.a.	42.076	0	0	n.a.
1997	49.500	0	0	n.a.	49.500	0	0	n.a.	49.500	0	0	n.a.
1998	64.503	0	0	n.a.	64.503	0	0	n.a.	64.503	0	0	n.a.
1999	61.929	0	0	n.a.	61.931	1	1	94,2%	61.926	-3	9	-283,8%
2000	79.675	0	0	n.a.	79.741	66	145	220,5%	79.735	59	145	244,1%
2001	83.434	0	0	n.a.	83.526	91	149	163,6%	83.519	85	150	176,6%
2002	86.710	0	0	n.a.	86.839	129	157	121,6%	86.832	122	157	128,6%
2003	83.851	0	0	n.a.	84.089	238	225	94,6%	84.083	232	226	97,4%
2004	91.285	23	268	1183,9%	91.676	413	374	90,5%	91.669	406	374	92,1%
2005	78.675	669	346	51,7%	79.092	1.085	839	77,3%	79.085	1.079	839	77,7%
2006	111.108	1.722	570	33,1%	112.101	2.715	1.179	43,4%	112.092	2.706	1.179	43,6%
2007	108.296	3.649	1.023	28,0%	110.749	6.102	2.907	47,6%	110.740	6.094	2.907	47,7%
2008	167.562	59.947	7.581	12,6%	185.080	77.465	18.335	23,7%	185.066	77.451	18.334	23,7%
	1.108.604	66.010	Total	11,88%	1.130.900	88.306	Total	21,28%	1.130.825	88.230	Total	21,30%

Os resultados da aplicação do Modelo de Mack encontram-se na tabela 4.13. Quando se considera a totalidade dos dados ou quando se corrige de uma das entradas, a variabilidade percentual é muito idêntica. É de observar que, se não houver a correcção proposta, no ano de acidente de 1999 teremos um montante negativo para as reservas, o que não tem qualquer sentido. É ainda de observar que o montante total das reservas e o erro de previsão são muito similares nestas duas opções.

Se, de facto, se tem informação suficiente que garanta a viabilidade de só considerar dados após 2003, constata-se que, comparativamente ao modelo aplicado à totalidade dos dados, se tem cerca de 20% menos das reservas e quase metade do erro de previsão. Essa opção poderá ser fundamental para a contabilidade da empresa.

4.2.2.1. CONCLUSÃO PARA O RAMO DE NEGÓCIO 2

Numa perspectiva mais conservadora, proponho para as reservas e respectivas provisões os valores obtidos pelo Modelo de Mack, visto neste modelo serem utilizados todos os dados disponíveis. Em relação ao valor negativo obtido para a reserva no ano de acidente de 1999, por uma questão de prudência, consideraria-o nulo. Com o objectivo de ter a distribuição preditiva das reservas apliquei a técnica de reamostragem de bootstrap ao modelo de Mack fazendo 1000 simulações. Na tabela 4.14, os valores para as reservas do Modelo de Mack após a simulação.

Tabela 4.14 – Montante total para sinistros Modelo de Mack com simulação (ramo de negócio 2)

Ano de acidente	Ramo de negócio 2			
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro padrão Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %
1996	42.076	0	0	n.a.
1997	49.500	0	0	n.a.
1998	64.503	0	0	n.a.
1999	61.930	1	144	11534,6%
2000	79.724	49	345	700,0%
2001	83.526	92	412	447,1%
2002	86.839	129	511	395,4%
2003	84.115	264	627	237,4%
2004	91.702	439	820	186,9%
2005	79.113	1.107	1.057	95,4%
2006	112.208	2.822	1.674	59,3%
2007	110.749	6.103	2.402	39,4%
2008	185.516	77.901	11.162	14,3%
Total	1.131.502	88.908	Total	13,68%

Conjugando estes resultados com a melhor estimativa e escalonando-os apresento, na tabela 4.15, os montantes para sinistros, reservas, erro de previsão assim como percentis quer por ano de acidente quer total. Este escalonamento teve como objectivo ajustar à melhor estimativa a distribuição empírica das reservas.

Tabela 4.15 – Montante total para sinistros para o ramo de negócio 2

Ano de acidente	Ramo de negócio 2									
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro padrão Reservas	EP(R _i)/R _i %	Reservas (50%)	Reservas (75%)	Reservas (90%)	Reservas (95%)	Reservas (97,5%)	
1996	42.076	0	0	n.a.	0	0	0	0	0	0
1997	49.515	15	0	n.a.	0	0	0	0	0	0
1998	64.544	41	0	n.a.	0	0	0	0	0	0
1999	61.990	61	7.001	11534,6%	0	0	0	301	3.843	
2000	79.782	107	748	700,0%	0	94	536	1.215	1.874	
2001	83.578	144	643	447,1%	2	135	679	1.297	1.974	
2002	86.894	184	728	395,4%	13	256	863	1.385	2.046	
2003	84.143	292	692	237,4%	91	444	1.092	1.629	2.120	
2004	91.877	614	1.148	186,9%	347	894	1.900	2.650	3.523	
2005	79.216	1.210	1.154	95,4%	924	1.723	2.789	3.479	3.908	
2006	112.362	2.976	1.766	59,3%	2.676	4.005	5.423	6.257	6.949	
2007	111.007	6.360	2.503	39,4%	6.116	7.848	9.561	10.898	11.999	
2008	187.513	79.898	11.448	14,3%	78.975	88.041	94.181	99.556	103.578	
Total	1.134.497	91.903	Total	13,68%	90.768	99.897	108.669	112.971	119.134	

Neste ramo de negócio gostaria de ter tido a possibilidade de saber como é que a empresa aborda o cálculo das reservas para dados com estas particularidades.

4.2.3. RAMO DE NEGÓCIO 3

Neste ramo de negócio, pretende-se parametrizar o Modelo log-Normal de forma a reflectir o conhecimento ou desconhecimento que se tem acerca dos dados.

Ao nível da notação⁴ utilizada na parametrização apresentada previamente, ao indicar que $X \sim IG(a, b)$ pretende-se dizer que $1/X \sim G(a, b^{-1})$. Esta parametrização é necessária porque, no programa utilizado, o parâmetro de variabilidade da distribuição Normal é dado pelo seu inverso, isto é, o parâmetro de precisão $\tau = 1/\sigma^2$.

4 G denota a distribuição Gama e IG a distribuição Gama Inversa

Nos segundo e terceiro níveis do modelo, especificam-se as distribuições dos parâmetros e, se necessário, os respectivos parâmetros. A escolha da distribuição Normal para os parâmetros de μ_{ik} (μ, α_i, β_k) é feita com o objectivo de permitir que o processo de simulação convirja para qualquer valor, sem restrições. Para reforçar este facto, escolhem-se as médias iguais a 0 e as variâncias ($\sigma_\mu^2, \sigma_{\alpha_i}^2$ e $\sigma_{\beta_k}^2$) de modo a que nunca sejam negativas e possam assumir valores grandes – este último facto leva a que tenham uma distribuição não informativa. Exemplificando: ao definir-se que $\sigma_\mu^2 \sim IG(0.1, 0.1)$, tem-se que $\tau_\mu = 1/\sigma_\mu^2 \sim G(0.1, 10)$, logo a média de τ será de 0.01 e, portanto, μ terá uma distribuição com variância de 100. Optou-se por permitir que os parâmetros α_i e β_k tivessem uma variância ainda maior (1000000).

Em relação à parametrização de σ^2 , esta foi escolhida de modo a mostrar a falta de informação relativamente a este parâmetro.

No que diz respeito ao parâmetro δ , na eventualidade de se conseguir estimar, pode definir-se $\mu_\delta \sim N(\hat{\delta}, 0.00001)$ ($\hat{\delta}$ representa o estimador da máxima verosimilhança para δ); caso contrário, propõe-se um valor, já que este parâmetro é estimado com o modelo e, ao permitir que tenha uma variabilidade grande, ele aproximar-se-á do seu verdadeiro valor. Em relação à dispersão σ_δ^2 , à semelhança das situações em que se desconhecia qualquer informação sobre este, definiu-se $\sigma_\delta^2 \sim IG(0.0001, 0.1)$. Ao considerar que δ tem uma distribuição normal, é possível incorrer na situação em que $C_{ik} + \delta < 0$

. Embora o modelo exclua esse valor da verosimilhança, uma opção prudente será considerar $\delta \sim G(a_\delta, b_\delta)$ com, por exemplo, $a_\delta \sim G(8, 0.1)$ e $b_\delta \sim G(10, 0.1)$.

Tem-se assim duas parametrizações para o Modelo log-Normal:

— parametrização 1:

$$\delta \sim N(\mu_\delta, \sigma_\delta^2);$$

mmudelta=8000, smudelta=0.0001;
asdelta=0.0001, bsdelta=0.1

— parametrização 2:

$$\delta \sim G(a_\delta, b_\delta);$$

$a_\delta \sim G(a\delta, b\delta);$
 $b_\delta \sim G(ab\delta, bb\delta);$
aadelta=8, badelta=0.1;
abdelta=10, bbdelta=0.1

Ao implementar estes dois modelos, não foi possível obter a distribuição estacionária *a posteriori* dos parâmetros. Desta forma, o modelo assim parametrizado não é aplicável aos dados existentes; a solução para esta situação será separá-los em dados de curto e de longo prazo e modelá-los separadamente.

Pôr-se-á a questão de, ao atribuir-se outra distribuição *a priori* para os parâmetros e hiperparâmetros, se conseguir a distribuição estacionária; ora, o facto de se ter, nos mesmos dados, duas informações bastantes distintas (uma com duração máxima de três anos, com valores elevados, e outra com uma duração de 10 ou 11 anos), vai condicionar a obtenção de um modelo único.

Este facto não invalida que, para outros dados, não deixe de ser aplicável; aqui

pretendi mostrar a dificuldade que encontrei na utilização deste modelo a este conjunto de dados. A este ramo de negócio, apresentado desta forma, poder-se-á ajustar outros modelos, como por exemplo o Modelo Normal [England e Verrall (2002)], no entanto, este modelo sai fora dos objectivos deste trabalho.

Utilizando, o Modelo de Mack na previsão das reservas deste ramo, é possível consultar, na tabela 4.16, as previsões para as reservas e o respectivo erro de previsão.

Tabela 4.16 – Estimativa do Modelo de Mack para o ramo de negócio 3

Ano	Ramo de negócio 3			
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro previsão Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %
1996	151.994	0	0	n.a.
1997	172.003	756	183	24,2%
1998	181.525	1.199	411	34,3%
1999	175.706	1.112	857	77,1%
2000	199.601	1.536	1.064	69,3%
2001	189.766	1.522	1.350	88,7%
2002	184.272	2.065	1.437	69,6%
2003	194.375	2.707	1.615	59,7%
2004	201.977	3.472	1.976	56,9%
2005	185.769	4.167	2.839	68,1%
2006	184.859	6.577	3.072	46,7%
2007	200.182	16.616	4.566	27,5%
2008	236.714	101.105	15.505	15,3%
Total	2.458.742	142.834	Total	13,01%

Percentualmente, o erro de previsão é maior nos anos de acidente de 1999 a 2005, o que é totalmente justificado pelo facto de, nesses anos e a partir do 4º período de desenvolvimento, os montantes incrementais terem um comportamento bastante errático – aumentam num ano, diminuem no outro e voltam a aumentar. Este comportamento vem, mais uma vez, justificar a modelação em separado da informação dos três primeiros anos de ocorrência dos restantes.

4.2.3.1. CONCLUSÃO PARA O RAMO DE NEGÓCIO 3

Sendo que não tenho disponível dados para modelar separadamente as responsabilidades de longo prazo das responsabilidades imediatas, considero que o Modelo de Mack será uma hipótese para o cálculo das reservas e respectivo erro de previsão. No entanto, parece-me ser uma solução de último recurso, sendo que o mais sensato seria obter mais informação quanto aos dados disponíveis.

Por forma a obter a distribuição empírica das reservas e à semelhança dos restantes ramos trabalhados, apliquei a técnica de simulação de *bootstrap* ao Modelo de Mack; os resultados encontram-se na tabela 4.17.

Tabela 4.17 – Montante total para sinistros Modelo de Mack com simulação (ramo de negócio 3)

Ano de acidente	Ramo de negócio 3			
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro padrão Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %
1996	151.994	0	0	n.a.
1997	171.990	743	2.025	n.a.
1998	181.416	1.089	2.447	n.a.
1999	175.727	1.133	2.443	215,6%
2000	199.537	1.473	2.897	196,7%
2001	189.692	1.448	2.909	200,8%
2002	184.205	1.998	3.205	160,4%
2003	194.382	2.713	3.277	120,8%
2004	202.066	3.561	3.796	106,6%
2005	185.767	4.165	3.599	86,4%
2006	184.788	6.506	4.682	72,0%
2007	200.027	16.460	6.739	40,9%
2008	237.900	102.292	21.275	20,8%
Total	2.459.492	143.583	Total	22,00%

Na tabela 4.18 poderão ser consultados os montantes das provisões para sinistros assim como as reservas e percentis centrados na melhor estimativa.

Tabela 4.18 – Montante total para sinistros para o ramo de negócio 3

Ano de acidente	Ramo de negócio 3									
	Montante total para sinistros	Reservas	Erro padrão Reservas	$EP(R_i)/R_i$ %	Reservas (50%)	Reservas (75%)	Reservas (90%)	Reservas (95%)	Reservas (97,5%)	Reservas
1996	151.994	0	n.a.	n.a.	0	0	0	0	0	0
1997	171.792	545	1.485	272,4%	112	856	2.160	3.174	4.421	
1998	181.578	1.252	2.812	224,6%	655	2.267	4.807	6.559	7.939	
1999	176.581	1.987	4.283	215,6%	1.043	3.430	6.969	9.445	12.482	
2000	201.357	3.293	6.476	196,7%	2.403	5.937	11.183	14.799	17.923	
2001	192.540	4.297	8.630	200,8%	2.670	7.253	13.528	19.341	27.021	
2002	187.703	5.496	8.813	160,4%	3.729	8.923	16.139	22.381	26.625	
2003	199.117	7.449	8.998	120,8%	5.882	11.545	19.889	24.163	27.621	
2004	208.267	9.763	10.405	106,6%	8.052	15.656	22.887	27.663	33.580	
2005	192.760	11.158	9.641	86,4%	9.563	16.547	24.281	29.476	32.941	
2006	191.837	13.555	9.755	72,0%	12.725	18.930	25.794	31.058	36.031	
2007	207.843	24.277	9.939	40,9%	23.349	30.624	37.714	41.673	44.821	
2008	246.850	111.241	23.136	20,8%	111.025	125.123	140.001	148.541	160.210	
Total	2.510.220	194.311	Total	22,00%	195.283	222.218	247.523	262.143	275.938	

4.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os métodos estocásticos para o cálculo das provisões para sinistros são actualmente uma ferramenta indispensável ao actuário. No entanto, esta não é a única ferramenta disponível, mas fará parte integrante de um conjunto de opções de avaliação – incluindo a sensibilidade do actuário – que permitirão fazer um correcto aprovisionamento.

Como foi visto, em muitos destes modelos, é possível obter uma possível distribuição preditiva das reservas e, consequentemente, um conjunto de medidas de risco, como por exemplo, os percentis. Este facto é bastante importante na actividade da seguradora, tanto ao nível da adequada provisão das reservas como da análise financeira e das tomadas de decisão.

Este trabalho está longe de ser exaustivo e muitas questões ficaram em aberto.

No Modelo de Mack que parâmetros utilizar para a cauda? Estes são escolhidos de forma subjectiva ou é necessário recorrer a técnicas, como o *bootstrap*, para estimá-las como aqui foi feito?

No quadro dos MLG, pode perguntar-se qual das medidas de variabilidade utilizar. Como é de esperar não existe resposta pois cada uma delas tem os seus prós e contras. Se, por um lado, o PPE é calculado a cada iteração *bootstrap*, se o modelo não foi bem ajustado a reamostragem dos erros irá potenciar o erro e, então, os valores do PPE e do SEP (bootstrap) virão bastante distorcidos; por outro lado, o SEP e o Upper baseiam-se no Teorema do Limite Central e constatou-se que, muitas vezes, a distribuição preditiva não será necessariamente Normal e mesmo uma sua aproximação poderá ser perigosa.

Introduziu-se em alguns dos modelos apresentados o parâmetro de escala variável. A forma como este parâmetro é calculado para o último período de desenvolvimento, assim como para a cauda, ficará ao critério do actuário – aqui apenas foram deixadas algumas propostas como exemplificado no ramo de negócio 1 com os Modelos de sobredispersão de Poisson (MLG e bayesiano).

Abordei a utilização de cauda em modelos estocásticos, apesar de não ter encontrado exemplos práticos na literatura académica, pois os dados assim o exigiam e procurei apresentar uma forma para o cálculo do erro de previsão nesta situação. Os modelos utilizados, no ajustamento dos factores de cauda, não são os únicos disponíveis, no entanto, pareceram-me os mais relevantes.

Em relação aos modelos num contexto bayesiano, a utilização destes não se poderá limitar à resolução de dificuldades de modelação para certo tipo de dados – o seu interesse e utilidade vai muito para além deste facto. Uma das grandes vantagens destes modelos está em conjugar informação exterior aos dados com os próprios dados directamente no modelo (se esta não existir, não se tira todo o partido desta formulação). Desta forma, o actuário poderá intervir através da escolha das *priors* para o factor de cauda, para o parâmetro de escala, para os parâmetros de linha e de coluna ou para factores de desenvolvimento. Isto permite que as provisões dadas pelo modelo sejam de acordo com as particularidades de cada ramo de negócio, portanto, quanto mais vasta for a informação disponibilizada para o modelo, maior concordância existirá entre as previsões e os valores futuros. Os modelos bayesianos vieram preencher uma lacuna nos métodos para provisões para sinistros: obter a distribuição preditiva das reservas com base nos acontecimentos passados e informação complementar.

Apesar de toda esta vertente adaptativa à informação disponível, a formulação de modelos baseados na estatística bayesiana poderá acarretar algumas dificuldades. É necessário ter do problema uma perspectiva diferente da que se tem para os modelos da estatística clássica. A escolha e parametrização de um modelo requer bastante cuidado – deve-se sempre recorrer a medidas para aferir o ajustamento do mesmo.

Em relação às técnicas de simulação utilizadas em todos estes modelos, há a

referir que, ao aplicá-las a modelos ou parametrizações menos bem feitas, certamente se poderá obter resultados perigosos. As técnicas de simulação não resolvem os problemas de ajustamento do modelo; antes pelo contrário, poderão potenciá-los e, erradamente, dar a noção de que está tudo bem. Com o intuito de mostrar as dificuldades do ajustamento, deixa-se o exemplo do Modelo log-Normal ao ramo de negócio 3.

Durante este trabalho, optei por trabalhar técnicas e modelos para as provisões para sinistros, quer por ano de acidente quer total. Não o fiz por ano de calendário, pois não traria nada de novo ao nível dos modelos apresentados. Mas se for caso disso, os modelos são facilmente adaptados a este facto.

Esta apresentação está longe de cobrir todas as situações que se depararão ao actuário no seu dia-a-dia, mas espera-se que sirva de ponto de partida para uma maior utilização destas metodologias.

CAPÍTULO 5 – CONCLUSÃO

O estágio realizado no âmbito do Mestrado em Ciências Actuarias foi, para além do ponto de ligação entre o percurso académico e o empresarial, o meu primeiro contacto profissional com o ramo segurador.

O tema para este estágio foi um grande desafio: abordei temáticas transversais a muitos dos conteúdos disciplinares e outras que constituíram temas novos. Desta forma, considero este período de aprendizagem como uma disciplina aglutinadora do mestrado.

Considero ter atingido os objectivos a que me propus no início do estágio, no entanto, esta área ainda tem, para mim, muitas questões a explorar e que me parecem pertinentes para a actividade da seguradora. Gostaria de ter podido adquirir uma maior sensibilidade à constituição das reservas, mas também sei que este é um processo de crescimento profissional; por agora tenho ferramentas que me permitem desenvolver e aprofundar esta área. Estou certa de que, em certas alturas do estágio, superei a minha capacidade de trabalho individual: por vezes as dificuldades, tanto ao nível dos conceitos e linguagem como do código de programação, impossibilitavam-me um desenvolvimento tão célere quanto desejava. Em todo o trabalho que realizei procurei pautar pelo rigor e por um trabalho autónomo, mas, quando se mostrou necessário, pude contar com a colaboração e disponibilidade dos orientadores. Relativamente aos conteúdos teóricos, aplicar a teoria bayesiana e os MLG ao cálculo das reservas constituiu uma descoberta interessante da aplicação destas duas

áreas; juntando este facto com a tarefa de programação – tanto na folha de cálculo como em R e WinBUGS –, considero que foi um estágio enriquecedor. Tenho apenas a lamentar o facto de não me ter sido possibilitado enriquecer o presente trabalho com dados e metodologias aplicadas na empresa, e, desta forma, não poder avaliar causas para possíveis disparidades de resultados.

Este estágio foi uma mais-valia quer a nível profissional quer a nível pessoal. A forma de trabalhar, as áreas de competência, a gestão dos recursos humanos e a estrutura da empresa foram aspectos de que tomei consciência durante este período. À empresa tenho a agradecer o facto de ter mostrado interesse e disponibilidade em acolher um elemento em formação do meio académico, tornando-se assim um elemento activo no processo de formação.

Este relatório é também um virar de página na minha formação académica iniciada há cerca de dois anos nesta área. Estou grata a todos os que comigo se cruzaram neste período; foram momentos de enriquecimento quer intelectual, quer social e profissional.

ANEXO

A.1. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO) LOB1 – CÓDIGO WINBUGS

[adaptado do código apresentado em Verrall (2004)]

```
#####
#### MODELO ####
#####
model{
  C<-1000
  R<-1000
  for( i in 1:r){
    #modelo para os dados (parte superior do triângulo)
    for( j in 1:(r+1-i)) {
      Z[i,j]<- Y[i,j]/R
      log(mu[i,j])<- alpha[i]+beta[j]
      #zeros trick
      zeros[i,j]<- 0
      zeros[i,j]~ dpois(phi[i,j])
      #phi não estocástico
      phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j])*log(mu[i,j])+loggam(Z[i,j]+1))/scale + C # - LogVerosimilhança
      #phi estocástico e <> por coluna usar
      #phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j])*log(mu[i,j]/scale[j])/scale[j]+loggam(Z[i,j]/scale[j]+1) +C # - LogVerosimilhança
      #phi estocástico e = por coluna usar
      #phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j])*log(mu[i,j]/scale))/scale+loggam(Z[i,j]/scale+1) +C # - LogVerosimilhança
    }
    #modelo para as observações futuras (parte inferior do triângulo)
    for( j in (r+2-i):r ) {
      mu2[i,j]<- mu[i,j]/scale # [j]
      Y[i,j]~ dpois(mu2[i,j])
      log(mu[i,j])<- alpha[i]+beta[j]
      Z[i,j]<-Y[i,j]*scale # [j]
    }
    #valores ajustados - observações passadas e futuras
    for( j in 1:r ) {
      fit[i,j]<- Z[i,j] *R
    }
    #modelo para a cauda
    fit[i,r+1]<-sum(fit[i,1:r])*(tail-1)
  }
  #distribuição para os parâmetros de linha (priors para as linhas)
  #montante total para sinistros no ano 1
  a[1]<- 741482/R
  alpha[1]<- log(a[1])
  for( i in 2:r) {
    a[i]~dgamma(ulta[i],ultb[i])
    alpha[i]<- log(a[i])
    ulta[i]<- pow(ultmean[i-1], 2)/pow(ultsd[i-1],2) # média = a/b variância a/b^2 => a=E^2/sd^2 e b=E/sd^2
    ultb[i]<-ultmean[i-1]/pow(ultsd[i-1], 2)
  }
  #distribuição para os parâmetros de coluna (priors para as colunas)
  for( i in 1:r) {
    p1[i]~dgamma(0.0001,0.001)
  }
  s<-sum(p1[1:r])
  for( i in 1:r) {
    p[i]<-p1[i]/s
    beta[i]<- log(p[i])
  }
}
```

```

pc[1]<-p[1]
for (i in 2:r) {
pc[i]<-pc[i-1]+p[i]
}
for (i in 1:(r-1)) {
lambda[i]<-pc[i+1]/pc[i]
}
#distribuição da prior para o parâmetros de dispersão
#estocástico e <> por coluna
#for (i in 1:r) {
#scale[i]~dgamma(ascle[i], bscale[i])
#ascle[i] <- pow(scale.est,2) / scale.var
#bscale[i] <- scale.est / scale.var
#}
#scale.est<- 1563.312/R
#scale.var<-0.025
#estocástico e = por coluna
#scale~dgamma(ascle, bscale)
#ascle<-pow(scale.est,2)/scale.var
#bscale<-scale.est/scale.var
#scale.var<-0.025
#scale.est<- 1563.312/R
#não estocástico (plug-in)
scale<-1563.312/R
#distribuição para o parâmetro de cauda
tail~dgamma(atail, btail)
atail<-pow(tail.est,2)/tail.var
btail<-tail.est/tail.var
tail.var<-pow(0.001457588,2)
tail.est<-1.005058
#reserva por ano de acidente e reserva total
#sem cauda
#for ( i in 2: r ){
#outstand.row[i]<-sum(fit[i,(r+2-i):r])
#}
#outstand.row[r+1]<-sum(outstand.row[2:r])
#com cauda
for ( i in 1: r ){
outstand.row[i]<-sum(fit[i,(r+2-i):(r+1)])
}
outstand.row[r+1]<-sum(outstand.row[1:r])
}
#####
#### DADOS ####
#####
list(r=13,
Y=structure(.Data=c(
392088, 150628, 48243, 40490, 23353, 18557, 29645, 14883, 8310, 4225, 4710, 4848, 1503,
368791, 215815, 50984, 41314, 37047, 29051, 26889, 13407, 18014, 6925, 8900, 3220, NA,
400179, 219989, 52333, 39994, 26622, 29857, 25140, 13607, 5830, 16001, 4162, NA, NA,
421385, 279596, 66219, 36054, 27720, 36175, 20407, 22925, 11963, 11637, NA, NA, NA,
500189, 261628, 64977, 40088, 33900, 21384, 24659, 27707, 16695, NA, NA, NA, NA,
509249, 205022, 45398, 43464, 26964, 29540, 26335, 14782, NA, NA, NA, NA, NA,
472884, 219964, 53268, 38117, 26488, 26469, 24505, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
525220, 251202, 52572, 33119, 25971, 38230, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
564472, 254903, 56661, 48822, 41091, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
497322, 213349, 53679, 53460, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
416259, 202399, 46485, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
405172, 191399, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
422447, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA),
.Dim=c(13,13)),
ultmean=c(822.026, 839.749, 947.905, 1017.852, 938.360, 916.986, 1016.615, 1098.278, 965.267,
828.691, 801.478, 843.988),
#c(822.114, 840.081, 947.489, 1016.653, 940.203, 923.902, 1030.892, 1123.987, 1020.406, 902.628,
892.740, 954.173), BF
#c(822.026, 839.749, 947.905, 1017.852, 938.360, 916.986, 1016.615, 1098.278, 965.267, 828.691,
801.478, 843.988), CL

```



```
#####
#### MODELO ####
#####
model{
C<-1000
R<-1000
for( i in 1:r){
#modelo para os dados (parte superior do triângulo)
for( j in 1:(r+1-m[i])) {
Z[i,j]<- Y[i,j]/R
log(mu[i,j])<- alpha[i]+beta[j]
#zeros trick
zeros[i,j]<- 0
zeros[i,j]~ dpois(phi[i,j])
#phi não estocástico
phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j]*log(mu[i,j])+loggam(Z[i,j]+1))/scale + C # - LogVerosimilhança
#phi estocástico e <> por coluna usar
#phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j]*log(mu[i,j]/scale[j])/scale[j]+loggam(Z[i,j]/scale[j]+1) +C # - LogVerosimilhança
#phi estocástico e = por coluna usar
#phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j]*log(mu[i,j]/scale))/scale+loggam(Z[i,j]/scale+1) +C # - LogVerosimilhança
}
#modelo para as observações futuras (parte inferior do triângulo)
for( j in (r+2-m[i]):k ) {
mu2[i,j]<- mu[i,j]/scale # [j]
Y[i,j]~ dpois(mu2[i,j])
log(mu[i,j])<- alpha[i]+beta[j]
Z[i,j]<-Y[i,j]*scale # [j]
}
#valores ajustados - observações passadas e futuras
for( j in 1:k ) {
fit[i,j]<- Z[i,j] *R
}
}
#distribuição para os parâmetros de linha (priors para as linhas)
#montante total para sinistros nos anos 1-7
a[1]<- 42076/R
alpha[1]<- log(a[1])
a[2]<-49500/R
alpha[2]<- log(a[2])
a[3]<- 64503 /R
alpha[3]<- log(a[3])
a[4]<- 61926/R
alpha[4]<- log(a[4])
a[5]<- 79735/R
alpha[5]<- log(a[5])
a[6]<- 83519/R
alpha[6]<- log(a[6])
a[7]<-86832/R
alpha[7]<- log(a[7])
for( i in (r-k+2):r ) {
a[i]~dgamma(ulta[i],ultb[i])
alpha[i]<- log(a[i])
ulta[i]<- pow(ultmean[i-(r-k+1)], 2)/pow(ultsd[i-(r-k+1)],2) # média = a/b variância a/b^2 => a=E^2/sd^2 e
b=E/sd^2
ultb[i]<-ultmean[i-(r-k+1)]/pow(ultsd[i-(r-k+1)], 2)
}
#distribuição para os parâmetros de coluna (priors para as colunas)
for( i in 1:k ) {
p1[i]~dgamma(0.0001,0.001)
}
s<-sum(p1[1:k])
for( i in 1:k ) {
p[i]<-p1[i]/s
beta[i]<- log(p[i])
}
pc[1]<-p[1]
for( i in 2:k ) {
```



```

NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0,
NA, NA, NA, NA, NA, 0, 0,
NA, NA, NA, NA, 0, 0, 0,
NA, NA, NA, 0, 0, 0, 0,
NA, NA, 0, 0, 0, 0, 0,
NA, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
.Dim=c(13,7))
)
list(
a=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 100, 100, 100, 100, 100, 100),
p1=c(0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3), #, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3),
Y=structure(.Data=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0,
NA, NA, NA, NA, NA, 0, 0,
NA, NA, NA, NA, 0, 0, 0,
NA, NA, NA, 0, 0, 0, 0,
NA, NA, 0, 0, 0, 0, 0,
NA, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
.Dim=c(13,7))
)
list(
a=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, 200, 200, 200, 200, 200, 200),
p1=c(1,1,1,1,1,1,1,1), #, 1,1,1,1,1,1),
Y=structure(.Data=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, 0,
NA, NA, NA, NA, NA, 0, 0,
NA, NA, NA, NA, 0, 0, 0,
NA, NA, 0, 0, 0, 0, 0,
NA, 0, 0, 0, 0, 0, 0),
.Dim=c(13,7))
)

```

A.3. MODELO BINOMIAL NEGATIVA (BAYESIANO) LOB1 – CÓDIGO WINBUGS

[adaptado do código apresentado em Verrall e England (2005)]

```

#####
#### MODELO ####
#####
model{
#modelo para os dados (parte superior do triângulo)
for(i in 1:78) {
Z[i]<-Y[i]/(scale*1000)
pC[i]<-D[i]/(scale*1000)
C[i]<-Z[i]+pC[i]
#zeros trick
zeros[i]<-0
zeros[i]~dpois(phi[i])
phi[i]<-(loggam(Z[i]+ 1)+loggam(pC[i])-loggam(C[i])-pC[i]*log(p1[row[i],col[i]]))-Z[i]*log(1-p1[row[i],col[i]]))
}
}

```

```

DD[3]<-DD[2]+Y[80]
for(i in 1:2) {DD[4+i]<-DD[4+i-1]+Y[82+i-1]}
for(i in 1:3) {DD[7+i]<-DD[7+i-1]+Y[85+i-1]}
for(i in 1:4) {DD[11+i]<-DD[11+i-1]+Y[89+i-1]}
for(i in 1:5) {DD[16+i]<-DD[16+i-1]+Y[94+i-1]}
for(i in 1:6) {DD[22+i]<-DD[22+i-1]+Y[100+i-1]}
for(i in 1:7) {DD[29+i]<-DD[29+i-1]+Y[107+i-1]}
for(i in 1:8) {DD[37+i]<-DD[37+i-1]+Y[115+i-1]}
for(i in 1:9) {DD[46+i]<-DD[46+i-1]+Y[124+i-1]}
for(i in 1:10) {DD[56+i]<-DD[56+i-1]+Y[134+i-1]}
for(i in 1:11) {DD[67+i]<-DD[67+i-1]+Y[145+i-1]}
#modelo para as observações futuras (parte inferior do triângulo)
for(i in 79:156) {
a1[i]<- max(0.01 ,(1 -p1[row[i],col[i]])*DD[i-78]/(scale*1000))
b1[i]<- p1[row[i],col[i]]/(scale*1000)
Z[i]~dgamma(a1[i],b1[i])
Y[i]<-Z[i]
}
#distribuição da prior para o parâmetros de dispersão
#estocástico e = por coluna
#scale~dgamma(ascle,bsele)
#ascle<-pow(scale.est,2)/scale.var
#bsele<-scale.est/scale.var
#scale.var<-0.025
#scale.est<- 1563.312 /1000
#não estocástico (plug-in)
scale <-1563.312 /1000
#parâmetros do modelo Binomial Negativa
for (k in 1:12) {
p[k]<-1/lambda[k]
lambda[k]<-exp(g[k])+ 1
g[k]~dnorm(0.5,1.0E-6)
}
#Escolher de entre uma das três opções:
#modelo de chain ladder
#for (j in 1:12) {
#for(i in 1:13) {p1[i,j]<-p[j]}
#}
#modelo para alteração de um factor de desenvolvimento incremental (link ratio)
# for(i in 1:13) {p1[i,1]<-p[1]}
# for(i in 1:3) {p1[i,2]<-p[2]}
# p1[4,2]<-p42
#for(i in 5:13) {p1[i,2]<-p[2]}
# p1[11,2]<-p42
# p1[12,2]<-p42
# p1[13,2]<-p42
#for(j in 3:12) {
#for(i in 1:13) {p1[i,j]<-p[j]}
#}
#lambda42<-g42+1
#p42<- 1/lambda42
#escolha da variabilidade da prior:
#para uma prior com variância grande
#g42~dgamma(0.005,0.01)
#para uma prior com variância pequena
# g42~dgamma(25,50)
#modelo para desenvolvimento diferenciado nos últimos 6 anos
for (j in 1:6) {
for (i in 1:(7-j)) {p1[i,j]<-op[j]}
for (i in (8-j):13) {p1[i,j]<-p[j]}
}
for (j in 7:12) {
for (i in 1:13) {p1[i,j]<-p[j]}
}
for (k in 1:6) {
op[k]<-1/olambda[k]
olambda[k]<-exp(og[k])+1

```

```

og[k]~dnorm(0.5,1.0E-6)
}
#reserva por ano de acidente e reserva tota
R[1] <- 0
R[2] <- Y[79]
R[3] <- sum(Y[80:81])
R[4] <- sum(Y[82:84])
R[5] <- sum(Y[85:88])
R[6] <- sum(Y[89:93])
R[7] <- sum(Y[94:99])
R[8] <- sum(Y[100:106])
R[9] <- sum(Y[107:114])
R[10] <- sum(Y[115:123])
R[11] <- sum(Y[124:133])
R[12] <- sum(Y[134:144])
R[13] <- sum(Y[145:156])
Total <- sum(R[2:13])
}
#####
#### DADOS ####
#####
list(row=c(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,
2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,
3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,
4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,
5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,
6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,
7,7,7,7,7,7,7,7,7,7,
8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,
9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,
10,10,10,10,10,10,10,10,10,10,
11,11,11,11,11,11,11,11,11,11,
12,12,12,12,12,12,12,12,12,12,
13,13,13,13,13,13,13,13,13,13,13),
col=c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,
1,2,3,4,5,6,7,8,9,
1,2,3,4,5,6,7,8,
1,2,3,4,5,6,7,
1,2,3,4,5,6,
1,2,3,4,5,
1,2,3,4,
1,2,3,
1,2,
1,
12,
11,12,
10,11,12,
9,10,11,12,
8,9,10,11,12,
7,8,9,10,11,12,
6,7,8,9,10,11,12,
5,6,7,8,9,10,11,12,
4,5,6,7,8,9,10,11,12,
3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,

```

2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12),
#dados incrementais sem a 1ª coluna
Y=c(150628, 48243, 40490, 23353, 8557, 29645, 14883, 8310, 4225, 4710, 4848, 1503,
215815, 50984, 41314, 37047, 29051, 26889, 13407, 18014, 6925, 8900, 3220,
219989, 52333, 39994, 26622, 29857, 25140, 13607, 5830, 16001, 4162,
279596, 66219, 36054, 27720, 36175, 20407, 22925, 11963, 11637,
261628, 64977, 40088, 33900, 21384, 24659, 27707, 16695,
205022, 45398, 43464, 26964, 29540, 26335, 14782,
219964, 53268, 38117, 26488, 26469, 24505,
251202, 52572, 33119, 25971, 38230,
254903, 56661, 48822, 41091,
213349, 53679, 53460,
202399, 46485,
191399,
NA,
NA, NA,
NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA),
#dados acumulados sem a última diagonal
D=c(392088, 542716, 590958, 631448, 654801, 673358, 703002, 717885, 726195, 730420, 735131,
739978,
368791, 584606, 635590, 676905, 713952, 743003, 769892, 783299, 801313, 808239, 817139,
400179, 620168, 672500, 712495, 739117, 768974, 794114, 807721, 813551, 829551,
421385, 700981, 767200, 803254, 830974, 867149, 887556, 910482, 922445,
500189, 761817, 826794, 866883, 900782, 922166, 946825, 974532,
509249, 714271, 759669, 803133, 830097, 859637, 885972,
472884, 692848, 746116, 784233, 810722, 837191,
525220, 776422, 828994, 862113, 888084,
564472, 819375, 876036, 924858,
497322, 710671, 764350,
416259, 618657,
405172,
NA,
NA, NA,
NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA),
#última diagonal sem a primeira linha dos dados acumulados
DD=c(820359,
833714, NA,
934082, NA, NA,
991227, NA, NA, NA,
900754, NA, NA, NA, NA,
861696, NA, NA, NA, NA, NA,
926314, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
965949, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
817810, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
665143, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
596570, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
422447, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA)
)

[illegible]

A.4. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (BAYESIANO) LOB2, 6 ANOS – CÓDIGO

WINBUGS

[adaptado do código apresentado em Verrall e England (2005)]

```

model{
C<-10
R<-1000
for( i in 1:r){
#Model for data
for( j in 1:(r+1-i)) {
Z[i,j]<- Y[i,j]/R
log(mu[i,j])<- alpha[i]+beta[j]
# Zeros trick:
zeros[i,j]<- 0
zeros[i,j]~ dpois(phi[i,j])
## phi não estocástico
#phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j]*log(mu[i,j])+loggam(Z[i,j]+1))/scale + C # MINUS log likelihood
## se phi estocástico e <= por coluna usar
#phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j]*log(mu[i,j]/scale[j]))/scale[j]+loggam(Z[i,j]/scale[j]+1) +C # MINUS log likelihood
## se phi estocástico e = por coluna usar
phi[i,j]<-(mu[i,j]-Z[i,j]*log(mu[i,j]/scale[j]))/scale[j]+loggam(Z[i,j]/scale[j]+1) +C # MINUS log likelihood
}
# Model for future observations:
for( j in (r+2-i):r ) {
mu2[i,j]<- mu[i,j]/scale #[]
Y[i,j]~ dpois(mu2[i,j])
log(mu[i,j])<- alpha[i]+beta[j]
Z[i,j]<-Y[i,j]*scale#[]
}
}
# Fitted values - past and future observations
for( j in 1:r ) {
fit[i,j]<- Z[i,j] *R
}
}
# Prior distributions for row parameters:
# The prior distribution can be changed by changing the data input values for the vectors ultmean and ultsd
# For the chain ladder technique use large values for the variance of the row parameters (alpha)
a[1]<- 83851/R #ultimate no ano 1 (idêntico para CL ou BF!)
alpha[1]<- log(a[1])
for( i in 2:r) {
a[i]~dgamma(ulta[i],ultb[i])
alpha[i]<- log(a[i])
ulta[i]<- pow(ultmean[i-1], 2)/pow(ultsd[i-1],2) # média = a/b variância a/b^2 => a=E^2/sd^2 e b=E/sd^2
ultb[i]<-ultmean[i-1]/pow(ultsd[i-1], 2)
}
}

```



```

}
# Prior distributions for column parameters:
for (i in 1:r) {
p1[i]~dgamma(0.0001,0.001)
}
s<-sum(p1[1:r])
for (i in 1:r) {
p[i]<-p1[i]/s
beta[i]<- log(p[i])
}
pc[1]<-p[1]
for (i in 2:r) {
pc[i]<-pc[i-1]+p[i]
}
for (i in 1:(r-1)) {
lambda[i]<-pc[i+1]/pc[i]
}
# Prior distributions for scale parameter:
#stochastic <> by column
#for (i in 1:r) {
#scale[i]~dgamma(ascale[i], bscale[i])
#ascale[i] <- pow(scale.est,2) / scale.var
#bscale[i] <- scale.est / scale.var
#}
#scale.est<- 903.0146/R
#scale.var<-0.025
#stochastic = by column
scale~dgamma(ascale, bscale)
ascale<-pow(scale.est,2)/scale.var
bscale<-scale.est/scale.var
scale.var<-0.01#0.025
scale.est<- 903.0146/R
#plug-in
#scale<-903.0146/R
#Row Totals and Overall Reserve:
for ( i in 2: r){
outstand.row[i]<-sum(fit[i,(r+2-i):r])
}
outstand.row[r+1]<-sum(outstand.row[2:r])
}
#####
#### DATA ####
#####
list(r=6,
Y=structure(.Data=c(58626, 24387, 397, 161, 259, 21,
62716, 25034, 1067, 1260, 1186, NA,
51464, 24834, 1354, 354, NA, NA,
61533, 44028, 3825, NA, NA, NA,
69578, 35068, NA, NA, NA , NA,
107615, NA, NA, NA, NA, NA),
.Dim=c(6,6)),
ultmean=c(91.285, 78.675, 111.108, 108.296, 167.562),
#c(91.319, 80.050, 113.342, 113.877, 212.978), BF
#c(91.285, 78.675, 111.108, 108.296, 167.562), CL
ultsd=c(1,1,1,1,1)
#ultsd=c(1,1,1,1,1)
#ultsd=c(100,100,100,100,100)
#ultsd=c(10000,10000,10000,10000,10000))
#####
#### INITIAL VALUES ####
#####
list(scale=0.9,
a=c(NA, 150, 150, 150, 150, 150), #ultimate, pe. prêmio
p1=c(0.5,0.5,0.5,0.5,0.5,0.5 ),
Y=structure(.Data=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, 0,
NA, NA, NA, NA, 0, 0,

```

```

NA, NA, NA, 0, 0, 0,
NA, NA, 0, 0, 0, 0,
NA, 0, 0, 0, 0, 0),
.Dim=c(6,6)))
list(scale=0.7,
a=c(NA,100,100, 100, 100, 100), #ultimate, pe. prêmio
p1=c(0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3, 0.3),#0.15,0.15,0.15,0.15,0.15,0.15 ),
Y=structure(.Data=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, 0,
NA, NA, NA, NA, 0, 0,
NA, NA, NA, 0, 0, 0,
NA, NA, 0, 0, 0, 0,
NA, 0, 0, 0, 0, 0),
.Dim=c(6,6)))
list(scale=1.2,
a=c(NA, 200, 200, 200, 200, 200), #ultimate, pe. prêmio
p1=c(1,1,1,1,1,1 ),
Y=structure(.Data=c(NA, NA, NA, NA, NA, NA,
NA, NA, NA, NA, NA, 0,
NA, NA, NA, NA, 0, 0,
NA, NA, NA, 0, 0, 0,
NA, NA, 0, 0, 0, 0,
NA, 0, 0, 0, 0, 0),
.Dim=c(6,6)))

```

A.5. MODELO LOG-NORMAL (BAYESIANO) LOB3 – CÓDIGO WINBUGS

[adaptado do código apresentado em de Alba (2006)]

```

#####
#### MODELO ####
#####
model{
C<- 1000
for(i in 1 : r) {
#modelo para os dados (parte superior do triângulo)
for(j in 1 : (r+1-i)) {
#ones trick
ones[i , j] <- 1
pp[i, j] <- ((sqrt(tau)/(x[i, j]+delta))*exp(-0.5 *pow(log(abs(x[i, j]+delta))-mu[i, j], 2)*tau))/C
p[i, j] <- max(pp[i,j],0)
cct[i,j] <- abs(p[i, j]/pp[i, j])
ones[ i, j ] ~ dbern( p[i , j ] )
mu[i , j] <- miu + alpha[i] + beta[j]
}
#modelo para as observações futuras (parte inferior do triângulo)
for(j in (r+2-i) : k) {
x[i, j] ~ dlnorm(mu[i, j], tau)
mu[i, j] <- miu + alpha[i] + beta[j]
}
}
#distribuição para os parâmetros
alpha[1] <- 0
beta[1] <- 0
for(i in 2 : r) {
alpha[i] ~ dnorm(0.0 , alpha.tau)
}
for(i in 2 : k) {
beta[i] ~ dnorm(0.0 , beta.tau)
}
alpha.tau ~ dgamma(0.001, 0.001)
beta.tau ~ dgamma(0.001, 0.001)
miu ~ dnorm(0.0 , miu.tau)
}

```

```

#miu~dgamma(10,10)
tau ~ dgamma(tau.a , tau.b)
sigma2 <- 1 / tau

miu.tau ~ dgamma(0.1, 0.1)
tau.a ~ dgamma(1,1 , 0.1)
tau.b ~ dgamma(1,4 , 0.1)
#modelo 1
#delta<-1000 #MLE(delta)
#modelo 2
#delta ~ dnorm(delta.a , delta.c)
#delta.a ~ dnorm(8000, 0.0001)
#delta.c ~ dgamma(0.0001 , 0.1)
#modelo 3
delta ~ dgamma(delta.a , delta.b)
delta.a ~ dgamma(8, 1)
delta.b ~ dgamma(10 , 0.01)
#reserva por ano de acidente e reserva total
for(i in 2 : r) {
outstand.row[i] <- sum(x[i, (r + 2 - i) : k]) - (i+(k-r-1))*delta
}
outstand.row[r+1] <- sum(outstand.row[2 : r])
}
#####
#### DADOS ####
#####
list(r = 13 , k =13,
x = structure(
.Data = c(82322, 51475, 11825, 2338, 1479, 1399, -148, -390, -595, 479, 613, 529, 668,
90636, 68086, 7206, 3097, 1357, 721, 570, 522, -769, -256, -111, 187, NA,
103259, 63237, 10995, 3273, 1108, -1046, -410, 500, -9, 60, -641, NA, NA,
88921, 73234, 9519, 508, -276, -186, 500, 987, 737, 649, NA, NA, NA,
107969, 73760, 12149, 3487, -3241, 1431, 700, 890, 920, NA, NA, NA, NA,
110843, 66466, 8363, 492, 151, -139, 1165, 903, NA, NA, NA, NA, NA,
102073, 70430, 3330, 2362, 1541, 1439, 1032, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
117445, 59214, 7290, 2535, 4070, 1115, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
122821, 60992, 8430, 3799, 2463, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
113671, 56813, 8857, 2260, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
113259, 57100, 7924, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
119736, 63830, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA,
135608, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA, NA),
.Dim = c(13, 13))
)
#####
#### VALORES INICIAIS ####
#####
list(
alpha = c(NA, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7, 0.7),
alpha.tau = 5,
beta = c(NA, -0.5,-0.5,-0.5,-0.5,-0.5, -0.5, -0.5,-0.5,-0.5,-0.5,-0.5,-0.5),
beta.tau = 20,
delta = 2000,
#delta.c =1,
delta.b=10,
miu = 5,
miu.tau = 50,
tau = 100,
tau.a =2000,
tau.b = 20
)
list(
alpha = c(NA, -5,-5,-5,-5,-5, -5, -5,-5,-5,-5,-5,-5),
alpha.tau = 10,
beta = c(NA, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),
beta.tau = 10,
delta = 500,
#delta.c =3,

```

```

delta.b=100,
miu = 1,
miu.tau = 20,
tau = 90,
tau.a = 1500,
tau.b = 50
)
list(
alpha = c(NA, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2),
alpha.tau = 3,
beta = c(NA, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2),
beta.tau = 3,
delta = 7000,
#delta.c = 5,
delta.b=1000,
miu = 2,
miu.tau = 3,
tau = 50,
tau.a = 501,
tau.b = 30
)
list(
alpha = c(NA, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1),
alpha.tau = 0.5,
beta = c(NA, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1),
beta.tau = 0.5,
delta = 100,
#delta.c = 2,
delta.b=10000,
miu = 0.5,
miu.tau = 1,
tau = 80,
tau.a = 1001,
tau.b = 30
)

```

A.6. MODELO DE SOBREDISPERSÃO DE POISSON (MLG) – MODELO 1 – CÓDIGO R

```

#####
#### Inicialização ####
#####
rm(list = ls())
#####
#### Bibliotecas ####
#####
library(stats)
library(graphics)
library(car)
library(ChainLadder)
#####
#### Leitura de dados #### (na forma incremental)
#####
#### leitura da tabela directamente do cliboard ####
# copiar a tabela dos dados históricos fazendo ctrl-c #
data<-read.table(file="clipboard", sep="\t")
tabl<-data
#### matriz com os dados a excluir #### onde estiver 0 os dados serão excluidos
## para os dados
1.#excl.data<-read.table(file="clipboard", sep="\t") # construida pelo utilizador
2.#excl.data<-matrix(NA,dim(data)[1],dim(data)[2]) # matrix standard
#excl.data[row(excl.data)+col(excl.data)<dim(data)[1]+2]<-1 #excl.data[max(dim(data)[1],dim(data)[2])
+abs(dim(data)[1]-dim(data)[2])+2]<-1
## para os factores de desenvolvimento
1.#excl.f<-read.table(file="clipboard", sep="\t") # construida pelo utilizador

```

```

2.#excl.f<-excl.data # idêntica à dos dados
3.#excl.f<-matrix(NA,dim(data)[1],dim(data)[2]) # matriz standard
#excl.f[row(excl.data)+col(excl.data)<9]<-0
##### verificação da conformidade das tabelas #####
if (dim(tabl)[1]!=dim(excl.data)[1] | dim(tabl)[2]!=dim(excl.data)[2]) stop("Matrizes não conformes")
tabl<-excl.data*data
if(any(colSums(tabl, na.rm=TRUE)<0)) stop("Não é possível ter soma de colunas nulas, reveja a matriz de
exclusão de dados")
##### constantes do modelo #####
nl<-nrow(tabl)
nc<-ncol(tabl)
nobs<-(1+min(nl,nc))*min(nl,nc)/2+abs(nl-nc)*min(nl,nc)
npred<-(1+(min(nl,nc)-1))*(min(nl,nc)-1)/2
nparam<-nl+nc-1
##### valores acumulados #####
tablacum<-matrix(NA,nl,nc)
tablacum<-t(apply(tabl,1,cumsum))
#####
#### Última diagonal ####
#####
Latest.ind<-tabl[row(tabl) == (nl+1 - col(tabl))]
Latest.ind<-rev(Latest.ind)
Latest.acum<-tablacum[row(tablacum) == (nl+1 - col(tablacum))]
Latest.acum<-rev(Latest.acum)
#####
##### Factores de desenvolvimento #####
#####
#### individual development factors #####
f_ij<-matrix(NA,nl,nc)
f_ij[,2:nc]<-tablacum[,1]/tablacum[,nc] #factores incrementais
f_ij[is.infinite(f_ij)]<-1
f_ij[,1]<-1
f_ij
##### factores de desenvolvimento: média dos fd com factor de exclusão #####
fdavg<-colSums(f_ij*excl.f,na.rm=TRUE)/colSums(excl.f,na.rm=TRUE)
fdavg
#### weighted (CL) ####
fdCL<-CL.fd(excl.f,tablacum,nl)
fdCL
#### escolhidos ####
#fdM<-c(1.5,1.4,1.3,1.2, etc...)
#### graphic output ####
j<-2 # factor d edesenvolvimento onde começa o gráfico
##gráfico individual
#factores de desenvolvimento CL
plot(j:nc,fdCL[-(1:(j-1))], pch=20,col='black', main="Factores de desenvolvimento CL",xlab="período de
desenvolvimento", ylab="factores de desenvolvimento")
lines(cbind(j:nc,fdCL[-(1:(j-1))]),col='blue',lty=3)
abline(h=1,col="lightgray", lty=3)
if(any(fdCL<1)) for(i in 1:nc) if(fdCL[i]<1) points(i,fdCL[i],pch=20, bg=par("bg"), col = "red")
#média dos factores individuais
plot(j:nc,fdavg[-(1:(j-1))], pch=23,col='black', main="Média dos factores de desenvolvimento",xlab="período
de desenvolvimento", ylab="factores de desenvolvimento")
lines(cbind(j:nc,fdavg[-(1:(j-1))]),col='forestgreen',lty=2)
abline(h=1,col="lightgray", lty=3)
if(any(fdavg<1)) for(i in 1:nc) if(fdavg[i]<1) points(i,fdavg[i],pch=23, bg=par("bg"), col = "red")
#gráfico conjunto
matplot(j:nc,cbind(fdCL[-(1:(j-1))],fdavg[-(1:(j-1))]), pch=c(1,13),col='black', main="Factores de
desenvolvimento: CL & médio",xlab="período de desenvolvimento", ylab="factores de desenvolvimento")
lines(cbind(j:nc,fdCL[-(1:(j-1))]),col='blue',lty=3)
lines(cbind(j:nc,fdavg[-(1:(j-1))]),col='forestgreen',lty=2)
abline(h=1,col="lightgray", lty=3)
if(any(fdCL<1)|(fdavg<1)) for(i in 1:nc){
  if(fdCL[i]<1) points(i,fdCL[i],pch=20, bg=par("bg"), col = "red")
  if(fdavg[i]<1) points(i,fdavg[i],pch=23, bg=par("bg"), col = "red")
}
#escolha dos factores de desenvolvimento escolhido para modelar a cauda

```

```

fd<-fdCL
#####
#### Cauda ####
#####
#### Cauda (extrapolação dos factores de desenvolvimento) ####
# valor fixo
#tail.f<-c(1.005,1.005,1.005, etc)
# condições iniciais para a construção da cauda
tail.s<-7 # comprimento da cauda
const<-0 # constante para a o modelo da curva inversa(normalmente=0)
start<-7 # periodo de desenvolvimento de início da modelação da
gamma<-0.7 # constante para o modelo Decay linear
if (tail.s==nc){
  fd.tail<-fd[-1]
  fd.acum<-rev(cumprod(fd.tail[length(fd.tail):1])) #[length(fd.tail):1]
}else{
  # ajustamento dos modelos para a cauda
  mod.t.ic<-fd.extrapl.ic(fd,start,tail.s,const,FALSE)
  mod.t.exp<-fd.extrapl.exp(fd,start,tail.s,FALSE)
  mod.t.log<-fd.extrapl.log(start,tail.s,tablacum,excl.f,FALSE)
  mod.t.dec<-fd.extrapl.decay(fd,gamma,start,tail.s,FALSE)

  # coeficientes
  cof<-cbind(summary.lm(mod.t.ic$tail)$coefficients,summary.lm(mod.t.exp$tail)
$coefficients,summary.lm(mod.t.log$tail)$coefficients)
  anov<-cbind(anova.lm(mod.t.ic$tail),anova.lm(mod.t.exp$tail),anova.lm(mod.t.log$tail))
  summary.lm(mod.t.ic$tail)
  #extractAIC(mod.t.ic$tail)
  #summary.lm(mod.t.exp$tail)
  #extractAIC(mod.t.exp$tail)
  #summary.lm(mod.t.log$tail)
  #extractAIC(mod.t.log$tail)
  #AIC(mod.t.log$tail,k=2)
  #AIC(mod.t.exp$tail)
  #AIC(mod.t.ic$tail)

  # graficos
  lst<-graph.tail(fd,mod.t.ic$fd,mod.t.exp$fd,mod.t.log$fd,mod.t.dec$fd,start,tail.s)# " for
blank entrance
  lst
  # qualidade do ajustamento (AIC)
  GF<-cbind(AIC(mod.t.ic$tail),AIC(mod.t.exp$tail),AIC(mod.t.log$tail))
  colnames(GF)<-c("Curva Inverse power","Exponencial", "Logaritmica")
  # (R^2)
  #GF<-cbind(summary.lm(mod.t.ic$tail)$adj.r.squared,summary.lm(mod.t.exp$tail)
$adj.r.squared,summary.lm(mod.t.log$tail)$adj.r.squared, mod.t.dec$R2)
  #GF<-cbind(summary.lm(mod.t.ic$tail)$r.squared,summary.lm(mod.t.exp$tail)
$r.squared,summary.lm(mod.t.log$tail)$r.squared, mod.t.dec$R2)
  #colnames(GF)<-c("Curva Inverse power","Exponencial", "Logaritmica","Decay linear")
  GF

  # variância para cada um dos modelos de cauda
  sig<-cbind(summary.lm(mod.t.ic$tail)$sigma,summary.lm(mod.t.exp$tail)
$sigma,summary.lm(mod.t.log$tail)$sigma)
  colnames(sig)<-c("Inverse power curve","Exponencial", "Logaritmic")
  sig

  # escolha da cauda
  fd.tail<-lst[,2][-1]
  # factores acumulados
  tail.acum<-cumprod(rev(fd.tail[nc:(tail.s-1)]))
}
#####
#### Reservas CL ####
#####
# sem cauda (fd de CL)
fdr<-rev(cumprod(rev(fd[-1])))
UltCL<-round(Latest.acum[2:min(nc,nl)]*rev(fdr),0)
UltCL<-c(tablacum[1:(nl-nc+1),nc],UltCL)
if(nc==nl)Latest.acum.t<-c(tablacum[1:(nl-nc+1),nc],Latest.acum[-1])
ResCL<-UltCL-Latest.acum.t#[2:nl]

```

```

perofult<-round(ResCL/UltCL*100,2)
perofultT<-round(sum(ResCL)/sum(UltCL),2)
Tot<-
cbind(c(Latest.acum.t,sum(Latest.acum.t)),c(ResCL,sum(ResCL)),c(perofult,perofultT),c(UltCL,sum(UltCL)
))
colnames(Tot)<-c("Paid", "Outstanding", "%of Ult", "Ultimate")
rownames(Tot)<-c(1:nl,"Total")
Tot
# com cauda (fd da cauda)
tablCLacum<-matrix(NA,nl,tail.s)
tablCLacum[,1:nc]<-tablacum
dif<-tail.s-nc
for(j in 2: tail.s) tablCLacum[min(nl,max((nl-j+2),1)):nl,j]<-tablCLacum[min(nl,max((nl-
j+2),1)):nl,j-1]*fd.tail[j-1]
tablCLinc<-cbind(tablCLacum[,1],round(t(apply(tablCLacum,1,dif)),0))
RsvCL<-matrix(0,nl,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1)) RsvCL[(nl-nc+1):nl,j]<-rowSums(tablCLinc[,1:(nc+j-1)]/((nl-nc+1):nl]-Latest.acum
#matrix(rowSums(tablCLinc[,1:(nc+j-1)])-Latest.acum,nl,1)
RCL<-rbind(RsvCL,colSums(RsvCL,na.rm=TRUE))
#UltCL.tail<-matrix(c(tablCLacum[,nc:tail.s],sum(tablCLacum[,nc:tail.s])),nl+1,1)
if(tail.s>nc){
  UltCL.tail<-rbind(tablCLacum[,nc:tail.s],colSums(tablCLacum[,nc:tail.s]))
}else{
  UltCL.tail<-c(tablCLacum[,nc],sum(tablCLacum[,nc]))
}
PaidCL.tail<-round(UltCL.tail-RCL,0)
TotCL.tail<-cbind(PaidCL.tail,RCL,round(RCL/UltCL.tail*100,2),UltCL.tail)
colnames(TotCL.tail)<-c(rep(c("Paid", "Outstanding", "%of Ult", "Ultimate"), each=tail.s-nc+1))
rownames(TotCL.tail)<-c(1:nl,"Total")
TotCL.tail
#####
#### Reservas Bournhutter-Ferguson ####
#####
### sem cauda
##Reservas CL
#M_i_nt<-UltCL[-(nl+1)]
##Prémio
#Lob1
M_i_nt<-c(850793, 865570, 885896, 919408, 972012, 984336, 1031689, 1177338, 1311652, 1326213,
1203325, 1158442, 1064596)
#Lob2 (6 últimos anos)
#M_i_nt<-c(84082, 224397, 240325, 255306, 273927, 294508)
#Lob2 (trapézio)
M_i_nt<-c(42076, 49500, 64503, 61926, 79734, 83518, 86830, 84082, 224397, 240325, 255306, 273927,
294508)
#sem cauda
fd.acum.CL<-cumprod(rev(fd[-1]))
ResBF<-round(M_i_nt[(nl-nc+2):nl]*(1-1/fd.acum.CL),0)
ResBF<-matrix(c(rep(0,nl-nc+1),ResBF,sum(ResBF)),nl+1,1)
rownames(ResBF)<-c(1:nl,"Total")
ResBF
#com cauda
fd.acum.tail.CL<-cumprod(rev(fd.tail))
ResBF.tail1<-round(M_i_nt*(1-1/fd.acum.tail.CL[-(1:(tail.s-nc-1))]),0)
ResBF.tail1<-matrix(c(ResBF.tail1,sum(ResBF.tail1)),nl+1,1)
rownames(ResBF.tail1)<-c(1:nl,"Total")
ResBF.tail1
# com cauda com M_i=UltCL
if(tail.s>nc){
  M_i_t<-UltCL.tail[-(nl+1),]
}else{
  M_i_t<-UltCL.tail[-(nl+1)]
}
ResBF.tail<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
fd.acum.BF<-matrix(1,nl,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1)){
  fd.acum.BF[max(1,(abs(nc-nl)-j+3)):nl,j]<-cumprod(rev(fd.tail[1:(nc+j-2)]))[(max(1,(j-1)):nl+j-2)]
}

```

```

}
ResBF.tail<-round(M_i_t*(1-1/fd.acum.BF),0)
ResBF.tail<-rbind(ResBF.tail,colSums(ResBF.tail))
rownames(ResBF.tail)<-c(1:nl,"Total")
#####
#### Modelo de Mack ####
#####
weights=1/tablacum
#weights[col(weights)+row(weights)>11] <- 0
#weights[col(weights) + row(weights) < 6] <- NA #faz CL só dos últimos 4 anos
MCL<-MackChainLadder(tablacum, weights=weights,est.sigma="Mack")
MCL$f
MCL$f.se
MCL$F.se
MCL$sigma
predict(MCL) # ou MCL$FullTriangle
plot(MCL)
MCL.tail<-MackChainLadder(tablacum, weights=weights, tail=TRUE, est.sigma="Mack")
MCL.tail$f
MCL.tail$f.se
MCL.tail$F.se
MCL.tail$sigma
MCL.tail$tail
plot(MCL.tail)
MCL.tail_val<-MackChainLadder(tablacum, weights=weights, tail=1.005058, est.sigma="Mack")
MCL.tail_val$f
MCL.tail_val$f.se
MCL.tail_val$F.se
MCL.tail_val$sigma
MCL.tail_val$tail
plot(MCL.tail)
Triangle<-MCL$Triangle
BCL<-BootChainLadder(Triangle, R=999, process.dist="od.pois")#gamma")
BCL$f
summary(BCL)
mean(BCL)
quantile(BCL, probs=c(0.5, 0.75, 0.9, 0.95, 0.975))
predict(MCL)
plot(BCL)
#####
#### Construção do modelo ####
#####
datavect<-m_to_v(tabl,nl,nc)
datavectacum<-m_to_v(tablacum,nl,nc)
weight.data<-m_to_v(excl.data,nl,nc)
power<-1 #1 for Poisson and 2 for Gamma
# pensar como fazer com matrizes cujos últimos valores são nulos
glmmodel<-glm.matrix(datavect,weight.data,nparam,nobs,nc,nl,power,"Fix") #"Variable"
phi.v<-glmmodel$phi
phi.m<-glmmodel$phi.m
param<-glmmodel$param1
ajmod<-glmmodel$mod
#### sob a forma de vetores ####
## modelo ajustado ##
model<-modM_to_v(ajmod,nl,nc)
modaj<-model$modaj
modajs<-model$modajs
modajacum<-model$modajacum
pred<-model$pred
preds<-model$preds
predacum<-model$predacum
#####
#### reservas do modelo ####
#####
Rs<-v_to_m(pred,nl,nc)
Rs[is.na(Rs)]<-0
Res<-rowSums(Rs)

```



```

funcvar<-V(Rs,power) # mu^_i.^2 ou mu^_i. -> função variância
ResT<-sum(Res) #mu^
REST<-c(Res,ResT)
#### com cauda #### (correr se o modelo tiver cauda)
ajmod.acum<-t(apply(ajmod,1,cumsum))
Last.diag.acum<-ajmod.acum[row(ajmod.acum)+col(ajmod.acum)==nl+1][nl:1]
tabl.tail.acum<-matrix(NA,nl,tail.s)
for(j in 1:nc) tabl.tail.acum[,j]<-ajmod.acum[,j]
if(tail.s>nc) for(j in (nc+1):tail.s) tabl.tail.acum[,j]<-tabl.tail.acum[,j-1]*fd.tail[j-1]
Res.tail<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1)) Res.tail[,j]<-zapsmall(tabl.tail.acum[,nc+j-1]-Last.diag.acum)
REST.tail<-rbind(Res.tail,colSums(Res.tail))
Ult.tail<-rbind(tabl.tail.acum[,nc:tail.s],colSums(tabl.tail.acum[,nc:tail.s]))
Paid.tail<-round(Ult.tail-REST.tail,0)
Tot.tail<-cbind(Paid.tail,REST.tail,Ult.tail)
colnames(Tot.tail)<-c(rep(c("Paid", "Outstanding", "Ultimate"), each=tail.s-nc+1))
rownames(Tot.tail)<-c(1:nl,"Total")
Tot.tail
tabl.tail.inc<-cbind(tabl.tail.acum[,1],t(apply(tabl.tail.acum,1,diff)))
Rst.tail<-tabl.tail.inc
Rst<-ajmod
Rst[row(Rst)+col(Rst)<=nl+1]<-0
Rst.tail[row(Rst.tail)+col(Rst.tail)<=nl+1]<-0
funcvar.tail<-V(Rst.tail,power)
funcvar<-V(Rst,power)
# parâmetro de dispersão
phi.tail<-phi.m
if(tail.s>nc) phi.tail<-matrix(c(phi.tail,rep(phi.tail[,nc],tail.s-nc)),nl,tail.s, byrow=FALSE)
phi.tail[row(phi.tail)+col(phi.tail)<nl+1]<-0
#####
#### Ajuste dos resíduos de Pearson ####
#####
resid<-t(glmmodel$sp_resid.m)
resid<-resid[!is.na(resid)]
resid<-zapsmall(resid)
#residM<-t(vs_to_m(resid,nl,nc)) # está por ordem transposta
W<-glmmodel$W
h<-matrixHat(W,nparam,nobs,nc)
ht<-h
hM<-vs_to_m(h,nl,nc)
modajs.b<-modajs[ht!=0]
Rsdaj<-resid/sqrt(1-ht)
Rsdaj[is.nan(Rsdaj)]<-0
RsdajM<-vs_to_m(Rsdaj,nl,nc)
#RsdajM[,((nc+1):nc)]<-0
RsdajM[row(RsdajM)+col(RsdajM)>nl+1]<-NA
RsdajM<-zapsmall(RsdajM)
RsdajMm<-RsdajM
RsdajMv<-m_to_v(RsdajMm,nl,nc)
Rsdajmv<-RsdajM[!is.na(RsdajM)]
#### resíduos não standardizados ####
graphicf1(modajs.b,resid)
Res_grh<-Residforgraph(resid,nl,nc,h,excl.data)
resid.orig<-Res_grh$orig
resid.dev<-Res_grh$dev
resid.cal<-Res_grh$cal
graphicf2(resid.orig,resid.dev,resid.cal,nl,nc,"Resíduos", "Resíduos")
#### resíduos standardizados ####
graphicf1(modajs.b,Rsdaj)
Rsdajd_grh<-Residforgraph(Rsdaj,nl,nc,h,excl.data)
Rsdajd.orig<-Rsdajd_grh$orig
Rsdajd.dev<-Rsdajd_grh$dev
Rsdajd.cal<-Rsdajd_grh$cal
graphicf2(Rsdajd.orig,Rsdajd.dev,,nl,nc,"Resíduos estandardizados", "Resíduos")
#####
#### Outliers ####
#####

```

```

#### graficamente
boxplot(resid)
title("Resíduos")
boxplot(Rsdaj)
title("Resíduos estandardizados")
#### ver os maiores e menores resíduos
a<-sort(resid,decreasing=TRUE)[c(1:5, length(resid):(length(resid)-5+1))]
a
a1<-sort(Rsdaj,decreasing=TRUE)[c(1:5, length(resid):(length(resid)-5+1))]
a1
#####
#### SEP teórico #####
#####
#### matriz da covariâncias ####
Mcov<-glmmodel$cov
Mdesigninf<-Mdi(npred,nparam,nc)
McovEta<-Mdesigninf%*%Mcov%*%t(Mdesigninf)
Mpred<-matrix(preds, nrow=min(nl,nc),ncol=npred, byrow=TRUE)
Msumquad<-Msq(min(nl,nc),npred)
Spred<-Mpred*Msumquad
aux<-diag(Spred%*%McovEta%*%t(Spred))
#### Standard error of prediction ####
SEPi<-array(0,c(nl,1))
phi.m.inf<-phi.m
phi.m.inf[row(phi.m)+col(phi.m)<max(nl,nc)+2]<-0
for(i in (2+(nl-nc)):nl)
SEPi[i]<-sqrt(rowSums(phi.m.inf*funcvar)[i]+aux[i-1-(nl-nc)])
SEPt<-sqrt(sum(phi.m.inf*funcvar)+aux[nl-(nl-nc)])
SEPT<-c(SEPi,SEPt) # SEP teórico, fórmulas (5) e (6) de Pinheiro e al.
se_perc<-round(SEPT/REST*100,1)
#### Variância do processo e da estimação ####
M.diag.pred<-matrix(0, nrow=npred,ncol=npred)
diag(M.diag.pred)<-preds
est.error<-0
est.error.mat<-M.diag.pred%*%McovEta%*%M.diag.pred
est.err<-sqrt(diag((Msumquad)%*%est.error.mat%*%t(Msumquad)))
est.err<-c(rep(0,nl-nc+1),est.err)
phi.squad<-c(phi.v)*Msumquad
phi.squad[nc,]<-colSums(phi.squad[1:nc,])#(nc-1,)]
proc.var<-phi.squad%*%preds^power
proc.var<-c(rep(0,nl-nc+1),proc.var)
est.err.perc.res<-round(est.err/REST*100,1)
est.err.perc.sept<-round(est.err/SEPT*100,1)
proc.var.perc.sept<-round(sqrt(proc.var/SEPT^2)*100,1)
#### Quadro resumo
Tsep<-cbind(REST, ResBF,
SEPT,se_perc,proc.var,proc.var.perc.sept,est.err,est.err.perc.sept,est.err.perc.res)
colnames(Tsep)<-c("Resrv CL", "Resrv BF", "SEP", "% of resv", "Proc. var", "% of SEP", "Est. error", "% of SEP", "% of resv")
Tsep
#cbind(proc.var,est.err,SEPT)
#####
#### Ciclo Bootstrap #####
#####
phi<-phi.m
phi[row(phi)+col(phi)>nl+1]<-NA
phi<-m_to_v(phi,nl,nc)
nB<-1000
outreserv<-matrix(0,nl*(tail.s-nc+1),nB) #cada coluna é um ciclo bootstrap
outreserv_p<-matrix(0,nl*(tail.s-nc+1),nB) #cada coluna é um ciclo bootstrap
outBF.cl<-matrix(0,nl*(tail.s-nc+1),nB) #cada coluna é um ciclo bootstrap
outBF.pr<-matrix(0,nl*(tail.s-nc+1),nB) #cada coluna é um ciclo bootstrap
fcvar<-matrix(0,nl*tail.s,nB)
outerror<-matrix(0,nl,nB)
outerror_p<- array(0, dim = c(nl,tail.s-nc+1, nB))
fdacumtailb<-matrix(0,tail.s-nc,nB)
#tail.acum<-matrix(0,tail.s-nc+1,nB)

```

```

tail<- array(0, dim = c(tail.s-1, 2, nB))
sclparam<-matrix(0,nc,nB)
ind.array <- array(0, dim = c(nl*nc, 2, nB))
acum.array <- array(0, dim = c(nl*nc, 2, nB))
Lst<-array(0, dim = c(nl, 2, nB))
pred1<-pred
predacum1<-predacum
for(ib in 1:nB){
  contr<-3
  while(contr==3){
    ##### reamostragem dos resíduos e cálculo da pseudo data #####
    datavectb<-matrix(NA,c(nl*nc,1))
    for(i in 1:(nl*nc)){
      ifelse(datavect[i]==0, datavectb[i]<-0,
            datavectb[i]<-(sample(Rsdajmv[Rsdajmv!
=0],1,replace=TRUE)*sqrt(modaj[i]^power*phi[i])+modaj[i])
            if(identical(RsdajMv[i],0)) datavectb[i]<-datavect[i]
      )
      b<-v_to_m(datavectb,nl,nc)
      b[is.na(b)]<-0
      colsum<-colSums(b)
      contr<-0
      for(j in 1:nc)if(colsum[j]<0) contr<-3
    }
    ##### tail factors #####
    tablb<-v_to_m(datavectb,nl,nc)
    tablacumb<-matrix(NA,nl,nc)
    tablacumb<-t(apply(tablb,1,cumsum))
    fdb<-CL.fd(excl.f,tablacumb,nl)
    if(tail.s>nc){
      fd.tailb<-c(fdb[2:(start-1)],fd.extrapl.exp(fdb,start,tail.s,FALSE)$fd)
    }else{
      fd.tailb<-fdb[-1]
    }
    fd.tailb.acum<-rev(cumprod(fd.tailb[length(fd.tailb):1]))
    tailb<-matrix(c(fd.tailb,fd.tailb.acum),length(fd.tailb),2)
    #fdtailb<-rev(cumprod(fd.tailb[length(fd.tailb):(length(fd.tailb)-(tail.s-nc+1)+1)]))
    fdtailb<-cumprod(rev(fd.tailb[nc:(tail.s-1)])) # o último é o acumulado final
    ##### ajuste do modelo #####
    power<-1
    glmmodelb<-glm.matrix(datavectb,weight.data,nparam,nobs,nc,nl,power,"Fix") # Variable"Fix"
    phib.v<-glmmodelb$phi
    phib.m<-glmmodelb$phi.m
    paramb<-glmmodelb$param1
    ajmodb<-glmmodelb$mod
    ##### sob a forma de vetores #####
    ## modelo ajustado
    modelb<-modM_to_v(ajmodb,nl,nc)
    modajb<-modelb$modaj
    modajsb<-modelb$modajs
    predb<-modelb$pred # as linhas são colocadas em coluna
    predsb<-modelb$preds
    predb_m<-v_to_m(predb,nl,nc)
    ##### preditores acumulados #####
    predbacum<-modelb$predacum
    predbacummat<-v_to_m(predbacum,nl,nc)
    predbacummat[is.na(predbacummat)]<-0
    ##### Latest #####
    latest.b<-v_to_m(modajb,nl,nc)
    latest.b[is.na(latest.b)]<-0
    Latest.acum.b<-rowSums(latest.b)#[max(1,nc):nl]
    Latest.inc.b[1:(nc-1)]<-latest.b[1:(nc-1),nc]
    Latest.inc.b[nc:nl]<-rev(latest.b[row(latest.b) == (nl+1 - col(latest.b))])
    #Latest.inc.b<-latest.b[row(latest.b) == (nl+1 - col(latest.b))]
    #Latest.inc.b<-rev(Latest.inc.b)
    ##### reservas do modelo #####
    tabl.acum.b<-t(apply(ajmodb,1,cumsum))

```

```

tabl.acum.tail.b<-matrix(NA,nl,tail.s)
Resvb<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
tabl.acum.tail.b[,1:nc]<-tabl.acum.b
if(tail.s>nc){
  for(j in (nc+1):tail.s)tabl.acum.tail.b[,j]<-tabl.acum.tail.b[,j-1]*fd.tailb[j-1]
  #tabl.acum.tail.b[, (nc+1):tail.s]<-tabl.acum.tail.b[,nc:(tail.s-1)]*fd.tailb[(nc-1):(tail.s-2)]
  for(j in nc:tail.s)Resvb[,j-nc+1]<-zapsmall(tabl.acum.tail.b[,j]-Latest.acum.b)
} else{
  Resvb<-zapsmall(tabl.acum.b[,nc]-Latest.acum.b)
}
tabl.acum.tail.b[row(tabl.acum.tail.b)+col(tabl.acum.tail.b)<=nl]<-0
if(tail.s>nc){
  tabl.inc.tail.b<-cbind(ajmodb,t(apply(tabl.acum.tail.b,1,diff))[,nc:(tail.s-1)])
} else{
  tabl.inc.tail.b<-ajmodb
}
funcv.b<-tabl.inc.tail.b^power
funcv.b[row(funcv.b)+col(funcv.b)<=nl+1]<-NA

#### reservas Bornhutter-Ferguson ####
if(tail.s>nc){
  M_i_t.b.cl<-tabl.acum.tail.b[,nc:tail.s]#RsvCL
} else{
  M_i_t.b.cl<-tabl.acum.b[,nc]#ResCL
}
M_i_t.b.p<-M_i_nt
ResBF.tail.b<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
fd.acum.BF.b<-matrix(1,nl,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1)){
  fd.acum.BF.b[max(1,(abs(nc-nl)-j+3)):nl,j]<-cumprod(rev(fd.tailb[1:(nc+j-2)]))#[max(1,
(j-1)):(nl+j-2)]
}
ResBF.tail.b.cl<-M_i_t.b.cl*(1-1/fd.acum.BF.b)
ResBF.tail.b.pr<-M_i_t.b.p*(1-1/fd.acum.BF.b)
#### pseudo realidade #### y^**
phib<-phib.m
phib[row(phib)+col(phib)<=nl+1]<-NA
phib<-c(t(phib))
pseudodata<-matrix(0,c(nc*nl,1))
for(i in 1:(nc*nl)) pseudodata[i]<-(sample(Rsdajmv[Rsdajmv!
=0],1,replace=TRUE)*sqrt(pred1[i]^power*phib[i]))+pred1[i]
pseudodataacum<-matrix(0,c(nc*nl,1))
for(i in 1:(nc*nl)) pseudodataacum[i]<-(sample(Rsdajmv[Rsdajmv!
=0],1,replace=TRUE)*sqrt(predacum1[i]^power*phib[i]))+predacum1[i]
modajb_p<-modajb
modajb_p[is.na(modajb_p)]<-0
pseudodata_p<-pseudodata
pseudodata_p[is.na(pseudodata_p)]<-0
pseudodatainc<-modajb_p+pseudodata_p
pseudoinc_mat<-matrix(pseudodatainc, nl, nc) #era transposta - verificar!!!!
tabl.acum.b_p<-t(apply(pseudoinc_mat,1,cumsum))
tabl.acum.tail.b_p<-matrix(NA,nl,tail.s)
Resvb_p<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
tabl.acum.tail.b_p[,1:nc]<-tabl.acum.b_p
if(tail.s>nc){
  for(j in (nc+1):tail.s)tabl.acum.tail.b_p[,j]<-tabl.acum.tail.b_p[,j-1]*fd.tailb[j-1]
  for(j in nc:tail.s)Resvb_p[,j-nc+1]<-zapsmall(tabl.acum.tail.b_p[,j]-Latest.acum.b)
} else{
  Resvb_p<-zapsmall(tabl.acum.b_p[,nc]-Latest.acum.b)
}
tabl.acum.tail.b_p[row(tabl.acum.tail.b_p)+col(tabl.acum.tail.b_p)<=nl]<-0
#Erro das reservas totais de ano de desenvolvimento
if(tail.s>nc){
  error_p<-(Resvb_p-Resvb)/sqrt(phib.m[,1]*Resvb)
  error_p[1,]<-(colSums(Resvb_p)-colSums(Resvb))/sqrt(colSums(phib.m[,1]*Resvb))
} else{

```

```

pseudo<-v_to_m(pseudodata,nl,nc)
pseudoacum<-v_to_m(pseudodataacum,nl,nc)
pseudo[is.na(pseudo)]<-0
pseudoacum[is.na(pseudoacum)]<-0
error<-(rowSums(pseudo)-rowSums(predb_m,na.rm=TRUE))/sqrt(rowSums(funcv.b[,1:
(nc)]*phib.m,na.rm=TRUE))
error[1]<-(sum(pseudo)-sum(predb_m,na.rm=TRUE))/sqrt(sum(funcv.b[,1:
(nc)]*phib.m,na.rm=TRUE))
##vectors
errorind<-(pseudo-predb)/sqrt(predb^power*phib)
erroracum<-(pseudoacum-predbacum)/sqrt(predbacum^power*phib)
#individualmente
ind<-matrix(c(predb,errorind),nl*nc,2)
acum<-matrix(c(predbacum,erroracum),nl*nc,2)
}
#### matriz dos erros e reservas ####
if(tail.s>nc){
  outerror_p[,ib]<-error_p
}else{
  outerror[,ib]<-error
  ind.array[,ib]<-ind
  acum.array[,ib]<-acum
}
outreserv[,ib]<-Resvb
outreserv_p[,ib]<-Resvb_p
outBF.cl[,ib]<-ResBF.tail.b.cl
outBF.pr[,ib]<-ResBF.tail.b.pr
tail[,ib]<-tailb
fdacumtailb[,ib]<-fdtailb
fcvar[,ib]<-funcv.b # as linhas da matriz estão em colunas seguidas
sclparam[,ib]<-phib.v
Lst[,1,ib]<-Latest.acum.b
Lst[,2,ib]<-Latest.inc.b
}
#####
#### Cálculo erro de previsão ####
#####
#### cauda ####
# tail incremental
tail.f.inc<-rowMeans(tail[,1,])
tail.sd.inc<-(nB-1)/nB*apply(tail[,1,],1,sd)
tail.f.inc
tail.sd.inc
# tail acumulated
tail.f.acum<-rowMeans(tail[,2,])
tail.sd.acum<-(nB-1)/nB*apply(tail[,2,],1,sd)
tail.f.acum
tail.sd.acum
# final tail acumulated
final.tail.f.acum<-rowMeans(fdacumtailb)
final.tail.sd.acum<-(nB-1)/nB*apply(fdacumtailb,1,sd)
final.tail.f.acum
final.tail.sd.acum
# medidas
pr<-c(0,0.025,0.05,0.25,0.5,0.75,0.95,0.975,1)
quantile(fdacumtailb[,2,],probs=pr,type=3)
p975<-quantile(fdacumtailb[,2,],probs=0.975,type=3)
p025<-quantile(fdacumtailb[,2,],probs=0.025,type=3)
tail.int<-matrix(NA,tail.s-nc,3*2)
tail.int[,1]<-tail.acum-qnorm(0.025)*final.tail.sd.acum
tail.int[,2]<-tail.acum
tail.int[,3]<-tail.acum+qnorm(0.975)*final.tail.sd.acum
tail.int[,4]<-tail.acum-p975*final.tail.sd.acum
tail.int[,5]<-tail.acum
tail.int[,6]<-tail.acum+p025*final.tail.sd.acum
tail.int
bias.tail<-tail.acum-final.tail.f.acum

```

```

bias.tail
#### reservas ####
# reservas totais de cada iteração bootstrap
Tb<-matrix(NA,tail.s-nc+1,nB)
TbBF.cl<-matrix(NA,tail.s-nc+1,nB)
TbBF.pr<-matrix(NA,tail.s-nc+1,nB)
for(j in 1:nB)for(i in 1:(tail.s-nc+1)){
  Tb[i,j]<-sum(outreserv[((i-1)*nl+1):(nl*i),j])
  TbBF.cl[i,j]<-sum(outBF.cl[((i-1)*nl+1):(nl*i),j])
  TbBF.pr[i,j]<-sum(outBF.pr[((i-1)*nl+1):(nl*i),j])
}
#### Reservas bootstrap ####
# anuais
Rb<-matrix(zapsmall(rowMeans(outreserv)),nl,tail.s-nc+1)
RbBF.cl<-matrix(zapsmall(rowMeans(outBF.cl)),nl,tail.s-nc+1)
RbBF.pr<-matrix(zapsmall(rowMeans(outBF.pr)),nl,tail.s-nc+1)
Cb.ind<-t(matrix(zapsmall(rowMeans(ind.array[,1,],na.rm=TRUE)),nc,nl))
Cb.acum<-t(matrix(zapsmall(rowMeans(acum.array[,1,],na.rm=TRUE)),nc,nl))
# totais
RTb<-zapsmall(colSums(Rb))
RTbBF.cl<-zapsmall(colSums(RbBF.cl))
RTbBF.pr<-zapsmall(colSums(RbBF.pr))
RESB<-matrix(NA,nl+1,tail.s-nc+1)
RESB[1:nl,]<-Rb
RESB[nl+1,]<-RTb
RESB.BF.cl<-matrix(NA,nl+1,tail.s-nc+1)
RESB.BF.cl[1:nl,]<-RbBF.cl
RESB.BF.cl[nl+1,]<-RTbBF.cl
RESB.BF.pr<-matrix(NA,nl+1,tail.s-nc+1)
RESB.BF.pr[1:nl,]<-RbBF.pr
RESB.BF.pr[nl+1,]<-RTbBF.pr
# média de cada previsão
prevind<-matrix(NA,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))for(j in 1:2)prevind[i,j]<-mean(ind.array[i,1,])
#média acumulada para cada ano de desenvolvimento
prevacum<-matrix(NA,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))prevacum[i,j]<-mean(acum.array[i,1,])
# parâmetro de escala escolhido para a cauda
phi.t<-c(phi.v[1:nc], rep(phi.v[nc],tail.s-nc))
phi.t.m<-matrix(c(rep(phi.t,nl)),nl,tail.s,byrow=TRUE) #sob a forma de matriz
scale<-rowMeans(sclparam)
##função variância
fcv<-matrix(rowMeans(fcvar),nl,tail.s)
fcvind<-matrix(NA,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))fcvind[i,j]<-mean(ind.array[i,1,]^power) # fcv com linha colocadas numa só coluna
fcvacum<-matrix(NA,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))fcvacum[i,j]<-mean(acum.array[i,1,]^power)
#### Standard error - Bootstrap sd ####
# desvio-padrão anual bootstrap
SEb<-zapsmall(matrix((nB-1)/nB * t(apply(outreserv,1,sd)),nl,tail.s-nc+1))
SEbBF.cl<-zapsmall(matrix((nB-1)/nB * t(apply(outBF.cl,1,sd)),nl,tail.s-nc+1))
SEbBF.pr<-zapsmall(matrix((nB-1)/nB * t(apply(outBF.pr,1,sd)),nl,tail.s-nc+1))
# desvio-padrão total bootstrap
SET<-zapsmall(matrix((nB-1)/nB*t(apply(Tb,1,sd)),1,tail.s-nc+1))
SET.BF.cl<-zapsmall(matrix((nB-1)/nB*t(apply(TbBF.cl,1,sd)),1,tail.s-nc+1))
SET.BF.pr<-zapsmall(matrix((nB-1)/nB*t(apply(TbBF.pr,1,sd)),1,tail.s-nc+1))
#standard error of prediction (reserves)
SEPIb<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1))
SEPIb[,j]<-zapsmall(sqrt(rowSums(phi.t.m[,1:(nc+j-1)]*fcv[,1:(nc+j-1)],na.rm=TRUE)+nobs/(nobs-
nparam)*SEb[,j]^2))
# standard error of prediction total bootstrap
SEPbt<-matrix(NA,1,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1))
SEPbt[j]<-sqrt(sum(phi.t.m[,1:(nc+j-1)]*fcv[,1:(nc+j-1)],na.rm=TRUE)+nobs/(nobs-nparam)*SET[j]^2)
SEPB<-rbind(SEPIb,SEPbt)
seb_perc<-round(SEPB/RESB*100,0)

```

```

SEPB.BF.cl<-rbind(SEbBF.cl,SET.BF.cl)
seb.bf.cl_perc<-round(SEPB.BF.cl/RESB.BF.cl*100,0)
SEPB.BF.pr<-rbind(SEbBF.pr,SET.BF.pr)
seb.bf.pr_perc<-round(SEPB.BF.pr/RESB.BF.pr*100,0)
#standard error of prediction (individual)
SEbind<-matrix(0,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))SEbind[i]<-(nB-1)/nB*sd(ind.array[i,1,])
SEbacum<-matrix(0,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))SEbacum[i]<-(nB-1)/nB*sd(acum.array[i,1,])
proc.var.ind.sep<-rep(phi.v,nl)*fcvind
SEPindb<-sqrt(proc.var.ind.sep+SEbind^2)
proc.var.ind.sep[is.na(proc.var.ind.sep)]<-0
proc.var.acum.sep<-m_to_v(t(apply(proc.var.ind.sep,1,cumsum)),nl,nc)
SEPacumb<-sqrt(proc.var.acum.sep+SEbacum^2)
# erro parcelar das reservas totais anuais
est.err.ib<-SEb
proc.var.ib<-matrix(NA,nl,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1)) proc.var.ib[j]<-rowSums(phi.t.m[,1:(nc+j-1)]*fcv[,1:(nc+j-1)],na.rm=TRUE)
as.i<-sqrt(proc.var.ib+nobs/(nobs-nparam)*est.err.ib^2)
cbind(as.i,SEPib)
# percentagem
est.err.perc.septib<-round(est.err.ib/SEPib*100,1)
proc.var.perc.septib<-round(proc.var.ib/SEPib^2*100,1)
# error parcelar das reservas totais
est.err.tb<-SET
# previsão reservas totais
proc.var.tb<-matrix(NA,1,tail.s-nc+1)
for(j in 1:(tail.s-nc+1)) proc.var.tb[j]<-sum(phi.t.m[,1:(nc+j-1)]*fcv[,1:(nc+j-1)],na.rm=TRUE)
as.t<-sqrt(proc.var.tb+nobs/(nobs-nparam)*est.err.tb^2)
cbind(as.t,SEPbt)
Est.Error.b<-rbind(est.err.ib,est.err.tb)
Proc.Var.b<-rbind(proc.var.ib,proc.var.tb)
cbind(Est.Error.b,Proc.Var.b)
# percentagem
est.err.perc.septtb<-round(est.err.tb/SEPbt*100,1)
proc.var.perc.septtb<-round(proc.var.tb/SEPbt^2*100,1)
Est.Error.perc.b<-rbind(est.err.perc.septib,est.err.perc.septtb)
Proc.Var.perc.b<-rbind(proc.var.perc.septib,proc.var.perc.septtb)
#### Tabela comparativa ####
T<-array(NA,c(nl+1,13,tail.s-nc+1))
for(j in 1:(tail.s-nc+1))
T[,j]<-
cbind(RESB[,j],SEPB[,j],seb_perc[,j],Proc.Var.b[,j],Proc.Var.perc.b[,j],Est.Error.b[,j],Est.Error.perc.b[,j],RES
B.BF.cl[,j],SEPB.BF.cl[,j],seb.bf.cl_perc[,j],RESB.BF.pr[,j],SEPB.BF.pr[,j],seb.bf.pr_perc[,j])
colnames(T)<-c("Resv CL","SEP","% of resv","Proc. var","% of SEP","Est error","% of SEP","Resv
BF.CL","SEP BF CL","% of resv BF","Resv BF.PR","SEP BF PR","% of resv BF")
rownames(T)<-c(1:nl,"Total")
T
##### Limites dos intervalos #####
#limite superior do intervalo de confiança 97,5% utilizando a normal com SEP teórico
Upper975i<-Res+qnorm(0.975)*SEPi
Upper975T<-ResT+qnorm(0.975)*SEPt
Upper975<-c(Upper975i,Upper975T)
#limite superior do intervalo de confiança 97,5% utilizando a normal com SEP bootstrap -> pg7 Pinheiro
SEP975i<-Res+qnorm(0.975)*SEPib[,1]
SEP975T<-ResT+qnorm(0.975)*SEPbt[,1]
SEP975<-c(S+P975i,SEP975T)
SEP975ind.sup<-pred1+qnorm(0.975)*SEPindb
SEP975ind.inf<-pred1+qnorm(0.025)*SEPindb
SEP975acum.sup<-predacum1+qnorm(0.975)*SEPacumb
SEP975acum.inf<-predacum1+qnorm(0.025)*SEPacumb
#percentil of the prediction error (com mu original) ->pg8 Pinheiro #assim só faz sentido para o interior do
triângulo
if(tail.s>nc){
  PPE<-matrix(0,nl,tail.s-nc+1)
  for(j in 1:(tail.s-nc+1)){

```

```

        for(i in 2:nl)PPE[i,j]<-sort(outerror_p[i,j,])[nB*0.975]*sqrt(phi.tail[,nc:tail.s]*Res.tail)[i,j]
+Res.tail[i,j] #funcvar e Res dos dados originais (1ª ajuste do modelo)
        PPEt[j]<-sort(outerror_p[1,j,])[nB*0.975]*sqrt(colSums(phi.tail[,nc:tail.s]*Res.tail)[j])
+colSums(Res.tail)[j]
    }
    PPE975<-rbind(PPE,PPEt)
}
else{
    PPE<-matrix(0,nl,1)
    for(i in 2:nl)PPE[i]<-sort(outerror[i,])[nB*0.975]*sqrt(rowSums(phi.m[,1:nc]*funcvar))[i]+Res[i]
#funcvar e Res dos dados originais (1ª ajuste do modelo)
    PPE[is.na(PPE)]<-0
    PPEt<-sort(outerror[1,])[nB*0.975]*sqrt(sum(t(c(phi.t[1:nc])*t(funcvar))))+ResT
    PPE975<-c(PPE,PPEt)
}
proc.var.ind.ppe<-v_to_m(rep(phi.v,nl)*pred1^power,nl,nc)#t(v_to_m(rep(phi.v,nl)*pred^power,nl,nc))
proc.var.ind.ppe[is.na(proc.var.ind.ppe)]<-0
PPEind.sup<-matrix(0,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))PPEind.sup[i]<- sort(ind.array[i,2,])[nB*0.975]*sqrt(rep(phi.v,nl)[i]*pred1[i]^power)+pred1[i]
PPEind.inf<-matrix(0,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))PPEind.inf[i]<- sort(ind.array[i,2,])[nB*0.025]*sqrt(rep(phi.v,nl)[i]*pred1[i]^power)+pred1[i]
proc.var.acum.ppe<-m_to_v(t(apply(proc.var.ind.ppe,1,cumsum)),nl,nc)
PPEacum.sup<-matrix(0,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))PPEacum.sup[i]<-sort(acum.array[i,2,])[nB*0.975]*sqrt(proc.var.acum.ppe[i])+predacum1[i]
PPEacum.inf<-matrix(0,nl*nc,1)
for(i in 1:(nl*nc))PPEacum.inf[i]<- sort(acum.array[i,2,])[nB*0.025]*sqrt(proc.var.acum.ppe[i])+predacum1[i]
#####
#### Estatísticas e Outputs gráficos ####
#####
#### Factores de desenvolvimento ####
#incrementais
op <- par(mfrow=c(ceiling((tail.s-1)/2),3)) #6/5
for(i in 1:(tail.s-1)) {
    hist(tail[i,1,], main = paste("FD incremental ", i), xlab = paste(i, "-",i+1))
}
par(op)
#acumulado
op <- par(mfrow=c(ceiling((tail.s-1)/2),3)) #6/5
for(i in 1:(tail.s-1)) {
    hist(tail[i,2,], main = paste("FD acumulado ", i), xlab = paste(i, "-",tail.s))
}
par(op)
# final acumulado
op <- par(mfrow=c((tail.s-nc)/2,3))
for(i in 1:(tail.s-nc)) {
    hist(fdacumtailb[i,], freq=FALSE,main = "Factor de cauda acumulado", xlab = paste(tail.s-i,
"-",tail.s))
    lines(density(fdacumtailb[i,]),col='black',lty=2, lwd=2)
    x<-seq(min(fdacumtailb[i,]),max(fdacumtailb[i,]),length=nB)
    y<-dnorm(x,mean=tail.acum[i],sd=final.tail.sd.acum[i])
    lines(x, y, col="red", lwd=2)
}
par(op)
#### Quadro output com erros####
ok<-matrix(NA,10,1)
for(i in 1:nl)ifelse(PPE975[i]<=SEP975[i], ok[i]<-1,ok[i]<-2)
#### para as reservas sem cauda #### o upper95, ppe95 e sep95 só está para modelo sem cauda
Q.1<-matrix(c(REST,SEPT,se_perc,RESB[,1],SEPB[,1],seb_perc[,1],Upper975,PPE975,SEP975),ncol=9)
#PPE975[,8]
colnames(Q.1)<-c("Reservas CL","SEP Teórico","%", "Reservas boot","SEP boot","%", "Upper975","PPE
boot","SEP975")
rownames(Q.1)<-c(1:nl,"Total")
Q.1
Q.2<-
matrix(c(SEPB[,1],Proc.Var.b[,1],Proc.Var.perc.b[,1],Est.Error.b[,1],Est.Error.perc.b[,1],SEPT),ncol=6)#,Est.
Error.perc,Proc.Var.perc,ncol=8)
colnames(Q.2)<-c("SEP boot", "Proc Error", "% of SEP boot","Est Error", "% of SEP boot","SEP
Teórico")#, "EstE(%) of SEPboot", "PE(%) of SEPboot")

```



```

rownames(Q.2)<-c(1:nl,"Total")
Q.2
#### Quantis de cada distribuição ####
pr<-c(0,0.025,0.05,0.25,0.5,0.75,0.95,0.975,1)
l<-length(pr)
q<-array(NA,c(nl+1,l,tail.s-nc+1))
for(j in 1:(tail.s-nc+1)){
  for(i in 1:nl)
    q[i,j]<-quantile(outreserv[i+(j-1)*nl,],probs=pr,type=3)
  q[nl+1,,j]<-quantile(Tb[j,],probs=pr,type=3)
}
colnames(q)<-c("Min","2,5%","5%","1°Q","Med","3°Q","95%","97,5%","Max")
rownames(q)<-c(1:nl,"Total")
q
#### Distribuição das reservas totais ####
#++++ substituir j por 1:(tail.s-nc+1)
j<-1
# medidas várias
quantile(c(Tb[j,]),type=3)# Extremes & Quartiles by default
m<-mean(c(Tb[j,]))
m
sd(c(Tb[j,]))
coefvar(c(Tb[j,]))
kurtosisB(c(Tb[j,]),nB)
skewnessB(c(Tb[j,]),nB)
# outputs gráficos das distribuição das reservas
# box plot das reservas totais no ano de cauda j (j=1 to tail.s-nc)
j<-1
boxplot(Tb[j,])
title("Reservas Totais")
points(RESB[nl+1,j],pch=20,col="red")
j<-1
# histograma
h<-hist(Tb[j,],nclass=20,col='blue',freq=FALSE,border="black",main=paste("Histograma das reservas
totais ", nc+j-1),xlab="Reservas Totais", ylab="densidade")
lines(density(Tb[j,]),col='black',lty=2, lwd=2)
rug(Tb[j,])
Tbxfit<-seq(min(Tb[j,]),max(Tb[j,]),length=nB)
Tbyfit<-dnorm(Tbxfit,mean=mean(Tb[j,]),sd=sd(c(Tb[j,])))
lines(Tbxfit, Tbyfit, col="red", lwd=2)
legend("topright", c("Empírica", "Normal dist"), col = c('black','red'),
      text.col = "black", lty = c(2,1),lwd=2, pch=c(NA_integer_,NA_integer_),merge = TRUE, bg =
'gray90',cex=0.9)
#função distribuição empírica
j<-1
F10<-ecdf(Tb[j,])
summary(ecdf(Tb[j,]))
op <- par(mfrow=c(1,2))
plot(ecdf(Tb[j,]), xlab="Total", verticals= TRUE, do.p = FALSE, lwd=2)
curve(pnorm(x,mean=RTb[j],sd=SET), from=1e7, to=4e7, add=TRUE, col='red')
rug(Tb[j,])
qqnorm(Tb[j,]);qqline(Tb[j,],col=2)
par(op)
##### gráfico de avaliação do ajustamento dos resultados #####
j<-1
op <- par(mfrow=c(2,2))
#boxplot da distribuição das reservas anuais
s<-list(outreserv[1+(j-1)*nl,],outreserv[2+(j-1)*nl,],outreserv[3+(j-1)*nl,],outreserv[4+(j-1)*nl,],outreserv[5+
(j-1)*nl,],outreserv[6+(j-1)*nl,],outreserv[7+(j-1)*nl,],outreserv[8+(j-1)*nl,],outreserv[9+
(j-1)*nl,],outreserv[10+(j-1)*nl,],outreserv[11+(j-1)*nl,],outreserv[12+(j-1)*nl,],outreserv[13+(j-1)*nl,],Tb[j,])
boxplot(s,main="Boxplot das reservas",xlab="Ano de acidente",ylab="Reservas",col="light
green",names=c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,"Total"))
points(RESB[,j],col='red', pch=19)#c(Res[1:nl],ResT)
#histograma dos montantes totais
Lt<-c(tablacum[1:(nc-1),nc],Latest.acum)
ultimate<-outreserv[(1+(j-1)*nl):(j*nl),]+Lt#Latest.acum
s.u<-

```

```

list(ultimate[1,],ultimate[2,],ultimate[3,],ultimate[4,],ultimate[5,],ultimate[6,],ultimate[7,],ultimate[8,],ultimate[
9,],ultimate[10,],ultimate[11],ultimate[12,],ultimate[13,])
boxplot(s.u,main="Boxplot Montante total",xlab="Ano de acidente", ylab="Montante total",col="light
green",names=c(2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,"Total"))
points(Res+Lt,col="red", pch=19)#Latest.acum
#boxplot do montantes acumulados até ao último periodo observado
s.l<-
list(Lst[1,1,],Lst[2,1,],Lst[3,1,],Lst[4,1,],Lst[5,1,],Lst[6,1,],Lst[7,1,],Lst[8,1,],Lst[9,1,],Lst[10,1,],Lst[11,1,],Lst[1
2,1,],Lst[13,1,])
boxplot(s.l,main="Boxplot do Latest acumulado",xlab="Ano de acidente", ylab="Latest acumulado",
col="bisque")
points(Lt,col="red", pch=19)#Latest.acum
####boxplot do montantes incrementais até ao último periodo observado
Ltind<-c(tabl[1:(nc-1),nc],Latest.ind)
s.l.inc<-
list(Lst[1,2,],Lst[2,2,],Lst[3,2,],Lst[4,2,],Lst[5,2,],Lst[6,2,],Lst[7,2,],Lst[8,2,],Lst[9,2,],Lst[10,2,],Lst[11,2,],Lst[1
2,2,],Lst[13,2,])
boxplot(s.l.inc,main="Boxplot do Latest incremental",xlab="Ano de acidente", ylab="Latest
incremental",col="bisque")
points(Ltind,col="red", pch=19)#Latest.ind
legend("topleft", "Latest observado", col = 'red',text.col = "black", pch=19, bg = 'gray90')
par(op)
#### Output gráfico (error associado à previsão) ####
j<-1
#se<-cbind(RESB[-(nl+1),]+est.err.ib[-(nl+1),][[(1+(j-1)*nl):(j*nl)], RESB[-(nl+1),]+sqrt(proc.var.ib[-(nl+1),]
[(1+(j-1)*nl):(j*nl)]), RESB[-(nl+1),]+SEPib[-(nl+1),], RESB[-(nl+1),]-est.err.ib[-(nl+1),][[(1+(j-1)*nl):(j*nl)],
RESB[-(nl+1),]-sqrt(proc.var.ib[-(nl+1),][[(1+(j-1)*nl):(j*nl)]), RESB[-(nl+1),]-SEPib[-(nl+1),]) # SEPib[-
(nl+1),][,j]
#matplot((nc+1):nl,se[(nc+1):nl,],col=c('red','blue','green'),type='l',lty=c(1,2,6),xlab="Ano de acidente",
ylab="milhões")
#lines(RESB[-(nl+1),],col="black", pch=19);points(RESB[-(nl+1),],col="black", pch=19)
#legend("topleft", c("Best estimate","Error of prediction","sqrt Process variance","SEP bootstrap"),
col=c('black','red','blue','green'),text.col = "black", lty = c(0, 1, 2,
6),pch=c(19,NA_integer_,NA_integer_,NA_integer_),merge = TRUE, bg = 'gray90')
se.sep<-cbind(RESB[-(nl+1),]+SEPib[-(nl+1),], RESB[-(nl+1),]-SEPib[-(nl+1),]) # SEPib[-(nl+1),][,j]
matplot((nc+1):nl,se.sep[(nc+1):nl,],col='green',type='l',lty=6,xlab="Ano de acidente", ylab="milhões")
lines(RESB[-(nl+1),],col="black", pch=19);points(RESB[-(nl+1),],col="black", pch=19)
legend("topleft", c("Best estimate","SEP bootstrap"), col=c('black','green'),text.col = "black", lty = c(0,
6),pch=c(19,NA_integer_),merge = TRUE, bg = 'gray90')
#### gráfico com margens para as reservas #####
j<-1
gres<-matrix(0,nl+j-1,5)
for(i in 1:(nl+j-1)){
#i<-13
gres[i,1]<- quantile(outreserv[i*j,],probs=0.975,type=3)
gres[i,2]<- quantile(outreserv[i*j,],probs=0.70,type=3)
gres[i,3]<- Rb[i,j]
gres[i,4]<- quantile(outreserv[i*j,],probs=0.30,type=3)
gres[i,5]<- quantile(outreserv[i*j,],probs=0.025,type=3)
}
matplot((nc+1):nl,gres[(nc+1):nl,], type = "l",
lty=c(2,6,1,6,2),lwd=c(1,1,2.5,1,1),col=c('red','blue','black','blue','red'),main=paste("Intervalos de confiança
reservas ",nc+j-1),ylab = "Montante reservas",xlab = "Ano de acidente", col.main = "black")
legend("topleft", c("97,5%-2,5%", "70%-30%", "Melhor estimativa (inc.)"), col = c('red','blue','black'),
text.col = "black", lty = c(2, 6, 1), merge = TRUE, bg = 'gray90',cex=0.55)
#### erro de previsão individual incremental ####
dataind<-m_to_v(tabl,nl,nc)
dataind[is.na(dataind)]<-0
predind<-pred1
predind[is.na(pred1)]<-0
modelind<-predind+dataind #blanck, 1
SEP975ind.sup[is.na(SEP975ind.sup)]<-0 #red, 2
SEP975ind.supg<-SEP975ind.sup+dataind
SEP975ind.inf[is.na(SEP975ind.inf)]<-0
SEP975ind.infg<-SEP975ind.inf+dataind
cbind(SEP975ind.inf,SEP975ind.sup)
PPEind.sup[is.na(PPEind.sup)]<-0 #blue, 6

```

```

PPEind.supg<-PPEind.sup+dataind
PPEind.inf[is.na(PPEind.inf)]<-0
PPEind.infg<-PPEind.inf+dataind
op <- par(mfrow=c(2,3))
for(i in 2:nl){
yind <- cbind(SEP975ind.supg[((i-1)*nc+1):(i*nc)],
  SEP975ind.infg[((i-1)*nc+1):(i*nc)],
  PPEind.infg[((i-1)*nc+1):(i*nc)],#PPEind.infg[((i-1)*nl+1):(i-1)*nc])
  PPEind.supg[((i-1)*nc+1):(i*nc)],
  modelind[((i-1)*nc+1):(i*nc)])
matplot(1:nc, yind, type = "l",
lty=c(2,2,6,6,1),lwd=c(1,1,1,1,2.5),col=c('red','red','blue','blue','black'),main=paste("Ano de acidente ",i),ylab
= "montante",xlab = "Período de desenvolvimento", col.main = "black")
legend("topright", c("SEP-97,5%", "PPE975", "Montante"), col = c('red','blue','black'),
text.col = "black", lty = c(2, 6, 1), merge = TRUE, bg = 'gray90',cex=0.55)
}
par(op)
##### erro de previsão individual acumulada #####
datavectacumacum<-m_to_v(tablacum,nl,nc)#tablacum[,-(nc+1):nc])
dataacum<-datavectacumacum
dataacum[is.na(dataacum)]<-0
predacum<-predacum
predacum[is.na(predacum)]<-0
modelacum<-dataacum+predacum #blanck, 1
SEP975acum.sup[is.na(SEP975acum.sup)]<-0 #red, 2
SEP975acum.supg<-dataacum+SEP975acum.sup
SEP975acum.inf[is.na(SEP975acum.inf)]<-0
SEP975acum.infg<-dataacum+SEP975acum.inf
PPEacum.sup[is.na(PPEacum.sup)]<-0 #blue, 6
PPEacum.supg<-dataacum+PPEacum.sup
PPEacum.inf[is.na(PPEacum.inf)]<-0
PPEacum.infg<-dataacum+PPEacum.inf
op <- par(mfrow=c(3,2))#,lend=3,fg=1)
for(i in 2:nl){
#i<-13
yacum <- cbind(SEP975acum.supg[((i-1)*nc+1):(i*nc)],PPEacum.supg[((i-1)*nc+1):
(i*nc)],modelacum[((i-1)*nc+1):(i*nc)],PPEacum.infg[((i-1)*nc+1):(i*nc)], SEP975acum.infg[((i-1)*nc+1):
(i*nc)])
matplot(1:nc, yacum, type = "l",
lty=c(2,6,1,6,2),lwd=c(1,1,1,2.5,1,1),col=c('red','blue','black','blue','red'),main=paste("Ano de acidente ",i),ylab
= "montante",xlab = "Período de desenvolvimento", col.main = "black")
legend("topleft", c("SEP-95%", "PPE95", "Montante"), col = c('red','blue','black'),
text.col = "black", lty = c(2, 6, 1), merge = TRUE, bg = 'gray90',cex=0.55)
}
par(op)
#####
#### Limpar ####
#####
rm(list = ls())

#####
#### Funções ####
#####
#### curtose bootstrap #####
kurtosisB <- function(x,n) {
m4 <- n/(n-1)*mean((x-mean(x))^4)
kurt <- m4/(sd(x)^4)-3
kurt
}
##usage:
#input: x->set of values, vector
# n->sample dimension
#output: kurt-> curtosis of a given set of values
#example: kurtosisB(c(1,2,3,4,5),5)
##### coeficiente de assimetria bootstrap #####
skewnessB <- function(x,n) {

```

```

m3 <- n/(n-1)*mean((x-mean(x))^3)
skew <- m3/(sd(x)^3)
skew
}
##usage:
#input: x->set of values, vector
#    n->sample dimension
#output: skew-> skewness of a given set of values
#example: skewnessB(c(10,2,3,4,5),5)
##### coeficiente de variação #####
coefvar<- function(x) sd(x)/mean(x)
##usage:
#input: x->set of values, vector
#output: coefvar-> coefficient of variation of a given set of values
#example: coefvar(c(10,2,3,4,5))
##### matrix design dos preditores (matrix triag inferior) #####
Mdi<-function(n,m,nc){
  Mdesigninf<-array(0,c(n,m))
  nl<-m-nc+1
  diff<-nl-nc
  for(i in 1:n) Mdesigninf[i,1]<-1
  a<-0;for(j in (diff+2):nl){
    for(i in 1:(j-1-diff)) Mdesigninf[a+i,j]<-1
    a<-a+i
  }
  a<-0;for(j in nl:(abs(nl-nc)+2)){
    d<-0
    for(i in 1:(nl-j+1)) {Mdesigninf[a+i,nl+j-1+d-diff]<-1;d<-d+1}
    a<-a+i
  }
  Mdesigninf
}
##usage:
#input: n->number of model preditores (npred)
#    m->number of model parameters (nparam)
#    nc->number of cols of the data triangle (nc)
#output: Mdesigninf->matrix of 0's and 1's with the index of de prediction coefficients
#example: Mdi(45,19,10)
##### matrix design do modelo ajustado (matrix triag superior)
Mds<-function(n,m,nc){
  Mdesignsup<-array(0,c(n,m))
  nl<-m-nc+1
  cont<-nl-nc
  j<-2
  ifelse(nc<nl,e<-1,e<-0)
  for(i in 1:n) Mdesignsup[i,1]<-1
  a<-nc;while(j<=nl){
    for(i in 1:(nc-j+1+e)) Mdesignsup[a+i,j]<-1
    a<-a+i
    while(cont>1){
      j<-j+1
      e<-e+1
      for(i in 1:nc) Mdesignsup[a+i,j]<-1
      cont<-cont-1
      a<-a+i
    }
    j<-j+1
  }
  j<-nc;
  cont<-nl-nc
  ifelse(nc<nl,f<-0,f<-abs(nl-nc))
  a<-0;while(j>=f+2){
    d<-0
    for(i in 2:j) {Mdesignsup[a+i,nl+d+1]<-1;d<-d+1}
    a<-a+i
    while(cont>0){
      d<-0

```

```

        for(i in 2:nc) {Mdesignsup[a+i,nl+d+1]<-1;d<-d+1}
        cont<-cont-1
        a<-a+i
    }
    j<-j-1
}
Mdesignsup
}

##usage:
#input: n->number of observations (nobs)
#   m->number of model parameters (nparam)
#   nc->number of columns of the data triangle (nc)
#output: Mdesignsup->matrix of 0's and 1's with the index of de model coeficientes
#example: Mds(55,19,10)
#### matriz que faz a soma dos quadrados incrementais da diagonal de uma matriz ####
Msq<-function(nl,n){
  Msumquad<-array(0,c(nl,n))
  for(j in 1:n) Msumquad[nl,j]<-1
  a<-0;for(i in 1:(nc-1)){
    for(j in 1:i) Msumquad[i,j+a]<-1
    a<-a+j
  }
  Msumquad
}

##usage:
#input: nl->number of lines of the data triangle (nl)
#   n->number of model predictores (npred)
#output: Msumquad->matrix of 0's and 1's to perform the diagonal sum
#example: Msq(10,45)
#### glm with matrix ####
glm.matrix<- function(vc,weight.data,n,m,nc,nl,pow,fi){
  W<-matrix(0,m,m)
  v_data<-vc[!is.na(vc)]
  paramini<-c(log(vc[1]),rep(1,n-1)) #inicialização dos parâmetros
  param1<-paramini
  v_weight<-weight.data[!is.na(weight.data)]
  nwobs<-sum(v_weight)
  nit<-0
  tol<-1
  Mdesignsup<-Mds(m,n,nc)
  while(tol>0.00000001){
    v_eta<-matrix(Mdesignsup%%param1)
    v_mu<-exp(v_eta)
    v_deta_dmu<-1/(v_mu)
    v_V<-v_mu^pow
    v_w<-v_weight/(v_deta_dmu^2*v_V)
    v_z<-v_deta_dmu*(v_data-v_mu)+v_eta
    diag(W)<-v_w
    X<-t(Mdesignsup)%%W%%Mdesignsup
    inv_X<-solve(X)
    param2<-inv_X%%((t(Mdesignsup)%%W)%%v_z)
    dif<-abs(param1-param2)
    tol<-sum(dif)
    param1<-param2
    nit<-nit+1
  }
  v_mu<-exp(v_eta)
  p_resid<-(v_data-v_mu)/sqrt(v_V)*v_weight
  p_resid.2<-p_resid^2
  if(fi=="Fix") {
    phi<-sum(p_resid.2)/(nwobs-n)
    phi<-matrix(phi,1,nc)
  }else{
    p_resid.2.m<-vs_to_m(p_resid.2,nl,nc)
    phi<-apply(p_resid.2.m,2,mean,na.rm=TRUE)
    phi<-nwobs/(nwobs-n)*phi
  }
}

```

```

        phi[length(phi)]<-min(phi[(length(phi)-2):(length(phi)-1)]) # o último é o menor valor dos
dois anteriores
    }
    phi.m<-matrix(phi,nl,nc,byrow=TRUE)#transposta
    p_resid.m<-t(vs_to_m(p_resid,nl,nc))
    p_resid.m<-p_resid.m*(1/sqrt(phi.m))#transposta
    p_resid<-p_resid.m[!is.na(p_resid.m)]
    phi.cov<-matrix(NA,nparam,nparam)
    for(i in 1:nparam) for(j in 1:nparam) {
        if(i<nl+1 && j<nl+1) phi.cov[i,j]<-phi[1]
        if(i<nl+1 && j>nl) phi.cov[i,j]<-phi[j-nl+1]
        if(i>nl && j<nl+1) phi.cov[i,j]<-phi[i-nl+1]
        if(i>nl && j>nl) phi.cov[i,j]<-sqrt(phi[j-nl+1]*phi[i-nl+1])
    }
    se<-phi.cov*diag(inv_X)
    cov<-phi.cov*inv_X
    mod<-array(0,c(nl,nc)) # devolve output sob a forma de matriz nl x nc
    a<-0
    for(i in 1:nl)for(j in 1:nc){
        if(i==1 && j==1)mod[i,j]<-exp(param1[1]) #1º elemento
        if(i==1 && j>1)mod[i,j]<-exp(param1[1]+param1[(nl-1)+j]) #1ª linha
        if(i>1 && j==1)mod[i,j]<-exp(param1[1]+param1[i]) #1ª coluna
        if(i>1 && j>1)mod[i,j]<-exp(param1[1]+param1[i]+param1[(nl-1)+j]) #restante
    }
    resid<-vs_to_m(p_resid,nl,nc)
    list(phi=phi, phi.m=phi.m, nit=nit, param1=param1, mod=mod, p_resid.v=p_resid,
p_resid.m=resid, cov=cov, W=W)
}
##usage:
#input: vc->vector with the data (claims) (only values)
#      n->number of model parameters (nparam)
#      m->number of observations (nobs)
#      nc->number of columns of the data triangle (nc)
#      nl->number of lines of the data triangle (nl)
#      pow->power on the variance function for quasi-likelihood
#output: phi->dispersion parameter (diance/df.residuals)
#      nit->number of iterations needed
#      param1->model coeficientes
#      mod->matrix with the adjusted model and predictors
#      p_resid->pearson residuals
#      cov->variance and covariance model matrix
# resid.orig->residual by origim year
# resid.dev->residual by desenvolvimento period
# resid.cal->residual by calendar year
#      fi-> "Fix" or "Variable" (option for the scale parameter)
#example: glm.matrix(claims,nparam,nobs,nc,nl)$mod->model matrix

#### transforma a matriz com o modelo ajustado e preditores em vectores ####
modM_to_v<-function(matmod,nl,nc){
    ## na forma acumulada
    matacum<-t(apply(matmod,1,cumsum))
    # sob a forma de vector de nl*nc x 1
    modajacum<-matrix(NA,c(nl*nc,1))
    predacum<-matrix(NA,c(nl*nc,1))
    for(i in 1:nl)for(j in 1:nc)ifelse(i+j<=max(nl,nc)+1, modajacum[(i-1)*nc+j]<-
matacum[i,j],predacum[(i-1)*nc+j]<-matacum[i,j])
    # sem entradas NA: vector nobs x 1 e npred x 1
    modajacums<-modajacum[!is.na(modajacum)]
    predacums<-predacum[!is.na(predacum)]
    #ou# valores por coluna!!
    #modajacums<-matacum[row(matacum)+col(matacum)<nl+2]
    #predacums<-matacum[row(matacum)+col(matacum)>nl+1]
    ## na forma incremental
    # sob a forma de vector de nl*nc x 1
    modaj<-matrix(NA,c(nl*nc,1))
    pred<-matrix(NA,c(nl*nc,1))

```

```

        for(i in 1:nl) for(j in 1:nc)ifelse(i+j<=max(nl,nc)+1, modaj[(i-1)*nc+j]<-matmod[i,j],pred[(i-1)*nc+j]<-
matmod[i,j])
        # sem entradas NA: vector nobis x 1 e npred x 1
        modajs<-modaj[!is.na(modaj)]
        preds<-pred[!is.na(pred)]
        list(modaj=modaj, modajs=modajs, pred=pred,
preds=preds,modajacum=modajacum,predacum=predacum,modajacums=modajacums,predacums=preda
cums)
    }
##usage:
#input: matmod->matrix with the adjusted model (ajmod)
#   nl->number of lines of the data triangle (nl)
#   nc->number of cols of the data triangle (nc)
#output: modaj->vector with the adjusted model values (includes NA)
#   modajs->vector with the adjusted model values (not includes NA)
#   pred->vector with the predict model values (includes NA)
#   preds->vector with the predict model values (not includes NA)
#   modajacum->vector with the adjusted cumulative model values (includes NA)
#   modajacums->vector with the adjusted cumulative model values (not includes NA)
#   predacum->vector with the predict cumulative model values (includes NA)
#   predacums->vector with the predict cumulative model values (not includes NA)
#example: modM_to_v(tablacum, ajmod,nl,nc)$modaj->ajusted model vectors
#### transforma uma matriz num vector coluna ####
m_to_v<-function(matr,nl,nc){
  vc<-matrix(NA,c(nl*nc,1))
  vc<-c(t(matr))
  vc
}
##usage:
#input: matr->matrix (tbl)
#   nl->number of lines of the matrix (nl)
#   nc->number of cols of the matrix (nc)
#output: vc->vector (claims) of dimension nl*nc x 1
#example: m_to_v(tbl,nl,nc)->vector
#transforma um vector coluna numa matriz
v_to_m<-function(vc,nl,nc){
  matr<-matrix(0,nl,nc)
  for(i in 1:nl) matr[i,(1:nc)]<-vc[(i-1)*nc+(1:nc)]
  matr
}
##usage:
#input: vc->vector
#   nl->number of lines of the matrix (nl)
#   nc->number of cols of the matrix (nc)
#output: matr->matrix
#example: v_to_m(pred,nl,nc)->matrix
#### transforma um vector coluna, com entradas excluidas (NA), numa matriz triangular superior
esquerda , preenche por linha ####
vs_to_m<-function(vc,nl,nc){
  matr<-matrix(NA,nl,nc)
  a<-0
  i<-1
  d<-i
  cont<-nl-nc
  d<-cont
  while(i<=nl){
    while(cont>=0){
      for(j in 1:nc) matr[i,j]<-vc[a+j]
      cont<-cont-1
      a<-a+j
      i<-i+1
    }
    for(j in 1:(nc-i+1+d)) matr[i,j]<-vc[a+j]
    a<-a+j
    i<-i+1
  }
  matr
}

```

```

    }
##usage:
#input: vc->vector
#   nl->number of lines of the matrix (nl)
#   nc->number of cols of the matrix (nc)
#output: matr->matrix
#example: vs_to_m(resid,nl,nc)->matrix
#### matrix hat (glm) ####
matrixHat<-function(W,n,m,nc){
  n<-nparam;m<-nobs
    Md<-Mds(m,n,nc)
    aux<-t(Md)%*%W%*%Md
    inv<-solve(aux)
    H<-Md%*%inv%*%t(Md)%*%W
    h<-diag(H)
    h
  }
##usage:
#input: W->matrix diagonal com o valores ajustados
#   n-> número de parametros do modelo
#   m->número de dados históricos
#   nc-> número de colunas
#output: h->vector da diagonal da matrix Hat
#example: matrixHat(W,nparam,nc)
#### Variance function ####
V<-function(vc,pow) vc^pow#rowSums(vc^pow)
##usage:
#input: vc->vector das reservas
#   pow->potência 1 para Poisson e 2 para Gama
#output: variance function
#example: V(Res,2)
#### Graph function 1 ####
graphicf1<-function(fittedval,resid){
  op<-par(mfrow=c(2,2))
  qqnorm(resid)
  qqline(resid,col=2)
  plot(log(fittedval), resid,type="p", main="Resíduos vs. Preditor linear", xlab="Preditor linear",
ylab="Resíduos")
  hist(resid,main = "Histograma", xlab = "Resíduos", ylab="frequência")
  plot(fittedval, resid, type='p', main="Resíduos vs. Valores ajustados", xlab="Valores
ajustados",ylab="Resíduos")
  par(op)
}
#example: graphicf(modajs,resid,log(modajs))
#### Graph function 2 ####
graphicf2<-function(orig,dev,cal,nl,nc,tex,ytex){
  op<-par(mfrow=c(3,1))
  plot(orig[,2],orig[,1],type='p', xlab="Ano de acidente", ylab=ytex)
  fit<-loess(orig[,1] ~ orig[,2])
  lines(predict(fit, seq(nl)) ~ seq(nl), col="blue", lwd=2)
  title(tex)
  plot(dev[,2],dev[,1],type='p', xlab="Período de desenvolvimento", ylab=ytex)
  fit<-loess(dev[,1] ~ dev[,2])
  lines(predict(fit, seq(nc)) ~ seq(nc), col="blue", lwd=2)
  plot(cal[,2],cal[,1],type='p', xlab="Ano de calendário", ylab=ytex)
  fit<-loess(cal[,1] ~ cal[,2])
  lines(predict(fit, seq(nl)) ~ seq(nl), col="blue", lwd=2)
  par(op)
}
#### Graph function 3 ####
graphicf3<-function(fittedval,resid,orig,dev,cal,nl,nc){
  par(fig=c(0,1/2,2/3,1),new=TRUE)
  qqnorm(resid)
  qqline(resid,col=2)
  par(fig=c(0.5,1,2/3,1),new=TRUE)
  plot(log(fittedval), resid,type="p", main="Resíduos vs. Preditor linear", xlab="Linear Predictor",
ylab="Residuals")

```



```

par(fig=c(0,1/2,1/3,2/3),new=TRUE)
hist(resid)
par(fig=c(1/2,1,1/3,2/3),new=TRUE)
plot(fittedval, resid, type='p', main="Resíduos vs. Valores ajustados", xlab="Fitted
Values", ylab="Residuals")
par(fig=c(0,1/3,0,1/3),new=TRUE)
plot(orig[,2],orig[,1],type='p', xlab="Ano de acidente", ylab="Resíduos estandardizados")
fit<-loess(orig[,1] ~ orig[,2])
lines(predict(fit, seq(nl)) ~ seq(nl), col="blue", lwd=2)
par(fig=c(1/3,2/3,0,1/3),new=TRUE)
plot(dev[,2],dev[,1],type='p', xlab="Período de desenvolvimento", ylab="Resíduos
estandardizados")
fit<-loess(dev[,1] ~ dev[,2])
lines(predict(fit, seq(nc)) ~ seq(nc), col="blue", lwd=2)
par(fig=c(2/3,1,0,1/3),new=TRUE)
plot(cal[,2],cal[,1],type='p', xlab="Ano de calendário", ylab="Resíduos estandardizados",cex=0.4)
fit<-loess(cal[,1] ~ cal[,2])
lines(predict(fit, seq(nl)) ~ seq(nl), col="blue", lwd=2)
mtext("Título", side=3, outer=TRUE, line=-3)# acertas
}
Residforgraph<-function(resd,nl,nc,h,excl.data){
  if(nc<nl){
    c1<-matrix(1:nl,nl,nc)
    c1<-c1*excl.data[-((nc+1):nl)]
    c2<-matrix(rep(1:nc,each=nl),nl,nc)
    c2<-c2*excl.data[-((nc+1):nl)]
    c3<-(c1+c2-1)*excl.data[-((nc+1):nl)]
    c1<-c1[!is.na(c1)]
    c1<-c1[h!=0]
    c2<-c2[!is.na(c2)]
    c2<-c2[h!=0]
    c3<-c3[!is.na(c3)]
    c3<-c3[h!=0]
  }else{
    count<-nl-nc+1
    ifelse(nc>=nl, c1<-rep(1:nc,seq(nc,abs(nl-nc)+1)), c1<-
c(rep(1:count,each=nc),rep((count+1):nl,seq(nc-1,1))))
    ifelse(nc>=nl, c2<-c(rep(1:nl, abs(nl-nc)),sequence(seq(nl,1))), c2<-
c(rep(1:nc,count),sequence(seq(nc-1,1))))
    c3<-c1+c2-1
  }
  resid.orig<-cbind(resd,c1)
  resid.dev<-cbind(resd,c2)
  resid.cal<-cbind(resd,c3)
  list(orig=resid.orig, dev=resid.dev, cal=resid.cal)
}
#### Chain ladder development factors ####
CL.fd<-function(excl.tab,tablacum,include){
  nc<-dim(excl.tab)[2]
  nl<-dim(excl.tab)[1]
  a<-0
  fd<-0
  dados<-tablacum#*excl.tab
  fd[1]<-1
  for(j in 2:nc){#j<-2
    ifelse(nl-j-include<1, fd[j]<-sum(dados[1:(nl-j+1),j])/sum(dados[1:(nl-j+1),j-1]),fd[j]<-
sum(dados[(nl-j+1-include+1):(nl-j+1),j])/sum(dados[(nl-j+1-include+1):(nl-j+1),j-1]))
    v<-excl.tab[j,!is.na(excl.tab[,j])]
    if(any(v==0)==TRUE){
      if(nl-j-include<1){
        d.1<-dados[1:(nl-j+1),j]*v
        d.1<-d.1[d.1!=0]
        d.2<-dados[1:(nl-j+1),j-1]*v
        d.2<-d.2[d.2!=0]
        fd[j]<-sum(d.1)/sum(d.2)
        if (j<nc){
          d.3<-dados[1:(nl-j+1),j+1]*v

```

```

        d.3<-d.3[!is.na(d.3)]
        d.3<-d.3[d.3!=0]
        fd[j+1]<-sum(d.3)/sum(d.1)
      }
    }else{
      d.1<-dados[(nl-j+1-include+1):(nl-j+1),j]*v
      d.1<-d.1[d.1!=0]
      d.2<-dados[(nl-j+1-include+1):(nl-j+1),j-1]*v
      d.2<-d.2[d.2!=0]
      fd[j]<-sum(d.1)/sum(d.2)
      if(j<nc){
        d.3<-dados[(nl-j+1-include+1):(nl-j+1),j+1]*v
        d.3<-d.3[!is.na(d.3)]
        d.3<-d.3[d.3!=0]
        fd[j+1]<-sum(d.3)/sum(d.1)
      }
    }
  }
}
fd

}

##usage:
#input: exl.tab->triangle of 0' & 1's with the included (1's) and excluded (0's) development factors
#  tablacum->triangle with the acumulated data
#  include->number of data to include p.e. if include=5 only the last 5 years are taken into account
#output: development factors
#example: CL.fd(excl.f,tabacum,include) ->fd
##### Development factors tail with inverse curve adjustment #####
fd.extrapl.ic<-function(fd,st,md,c,plt){
  if(md<length(fd)||st<2)stop("Max dev inferior ao número de períodos de desenvolvimento")
  t1<-st:length(fd)
  t2<-st:md
  fd<-fd[t1]
  fd<-fd[fd!=1]
  t3<-st:(st+length(fd)-1)

  ## inverse power curve  $fd = 1 + a (t+c)^{-b}$ 
  tail<-lm(log(fd-1)~1+l(log(1/(t3+c))))
  coef<-tail$coefficients
  fd.t<-1+exp(coef[1])*(t2+c)^-coef[2]
  if(plt){
    op<-par(mfrow=c(2,2))
    plot(tail)
    par(op)
  }
  list(tail=tail,fd=fd.t)
}

##usage:
#input: fd->development factors (CL or other) from de original data
#  st->adjustment starting point(>=2)
#  md->maximum development periods (includes existing development periods)
#  plt->TRUE for plotting
#output: tail->inverse curve adjusted model of the development factors
#  fd.t->inverse curve adjusted development factors
#example: fd.extrapl.ip(fd,start,tail.size)
##### Development factors tail with exponential decay adjustment #####
fd.extrapl.exp<-function(fd,st,md,plt){
  if(md<length(fd)||st<2)stop("Max dev inferior ao número de períodos de desenvolvimento")
  t1<-st:length(fd)
  t2<-st:md
  fd<-fd[t1]
  fd<-fd[fd!=1]
  t3<-st:(st+length(fd)-1)

  ## exponential curve  $fd = a \exp(bt)$ 
  tail<-lm(log(fd-1)~t3)

```

```

      coef<-tail$coefficients
      fd.t<-1+exp(coef[1]+coef[2]*t2)
      if(plt){
        op<-par(mfrow=c(2,2))
        plot(tail)
        par(op)
      }
      #summary.lm(tail)$adj.r.squared
      list(tail=tail,fd=fd.t)
    }
  }
##usage:
#input: fd->development factors (CL or other) from de original data
#  st->adjustment starting point(>=2)
#  md->maximum development periods (includes existing development periods)
#  plt->TRUE for plotting
#output: tail->exponencial adjusted model of the development factors
#  fd.t->exponencial curve adjusted development factors
#example: fd.extrapl.exp(fd,start,tail.size)
##### Development factors tail with logarithmic adjustment #####
fd.extrapl.log<-function(st,md,tbl.ac,excl.f,plt){
  nl<-dim(excl.f)[1]
  ndp<-dim(excl.f)[2]
  if(md<length(fd)||st<2)stop("Max dev inferior ao número de períodos de desenvolvimento")
  t1<-st:ndp
  t2<-st:md
  ## logarithmic curve y = a + b*ln(t) ##
  tbl.ac2<-tbl.ac[,-(1:(st-2))]
  tbl.ac2<-tbl.ac2[!is.na(tbl.ac2)]
  excl.f2<-excl.f[-((nl-st+3):nl),-(1:(st-2))]
  fact2<-rep((st-1):nl,(nl-st+2):1)
  fact<-fact2
  tbl.ac1<-tbl.ac2
  if(nl>ndp) fact<-fact[-((length(fact)-(nl-nc+1)*(nl-nc)/2+1):length(fact))]
  tail<-lm(tbl.ac1~log(fact))
  coef<-tail$coefficients
  tbl.ac1.l<-t(vs_to_m(coef[1]+coef[2]*log(fact),dim(excl.f2)[1],dim(excl.f2)[2]))
  fd.l.t<-((coef[1]+coef[2]*log((max(fact)+1):(max(fact)+md-ndp)))/(coef[1]+coef[2]*log(max(fact):
(max(fact)+md-ndp-1))))
  fd.t<-c(CL.fd(excl.f2,tbl.ac1.l,dim(excl.f2)[1])[-1],fd.l.t)
  if(plt){
    op<-par(mfrow=c(2,2))
    plot(tail)
    par(op)
  }
  list(tail=tail,fd=fd.t)
}
}
##usage:
#input: fd->development factors (CL or other) from de original data
#  st->adjustment starting point(>=2)
#  md->maximum development periods (includes existing development periods)
#  tbl.ac->table with the acumulated data
#  excl.f->table with the excludes development factors
#  plt->TRUE for plotting
#output: tail->exponencial adjusted model of the development factors
#  fd.t->exponencial curve adjusted development factors
#example: fd.extrapl.exp(fd,start,tail.size,tablacum,excl.f)
##### Development factors tail with exponencial decay adjustment #####
fd.extrapl.decay<-function(fd,gama,st,md,plt){
  if(md<length(fd)||st<2)stop("Max dev inferior ao número de períodos de desenvolvimento")
  t1<-st:length(fd)
  t2<-st:md
  tail<-fd
  tail1<-fd
  fd<-fd[t1]
  fd<-fd[fd!=1]
  t3<-st:(st+length(fd)-1)

```

```

## decay fd = 1+gama*(fd_{i-1}-1)
for(j in t2) tail[j]<-1+gama*(tail[j]-1)
fd.t<-tail[t2]
m<-mean(tail[t3])
r2<-1-sum((tail[t3]-tail1[t3])^2)/sum((tail[t3]-m)^2)
if(plt){
  op<-par(mfrow=c(1,1))
  plot(tail)
  par(op)
}
list(tail=tail, fd=fd.t, r2=r2)
}
##usage:
#input: fd->development factors (CL or other) from de original data
# st->adjustment starting point(>=2)
# md->maximum development periods (includes existing development periods)
# plt->TRUE for plotting
#output: tail->exponencial adjusted model of the development factors
# fd.t->exponencial curve adjusted development factors
#example: fd.extrapl.decay(fd,start,tail.size)
##### Development factors graphics #####
graph.tail<-function(fd0,fd1,fd2,fd3,fd4,st,md){
  ndp<-length(fd0[!is.na(fd0)])
  l<-length(fd0)
  if(ndp<l)md<-ndp
  dpt<-st:md
  lst<-matrix(NA,md,13,byrow=FALSE)
  lst[1:ndp,1:5]<-fd0#[1:md]
  lst[1:ndp,9]<-cumprod(lst[1:ndp,5])
  #inverse curve
  lst[st:md,1]<-fd1#[1:md]
  if(all(lst[st:md,1]>=1)) {
    lst[1:md,6]<-cumprod(lst[1:md,1])
    lst[1:md,10]<-lst[1:md,6]/lst[md,6]*100
    legd<-"inverse curve" #power
    co<-2
  }
  #exponencial
  lst[st:md,2]<-fd2#[1:md]
  if(all(lst[st:md,2]>=1)) {
    lst[1:md,7]<-cumprod(lst[1:md,2])
    lst[1:md,11]<-lst[1:md,7]/lst[md,7]*100
    legd<-cbind(legd,"exponencial")
    legd2<-legd
    co<-cbind(co,3)
  }
  #logaritmico
  lst[st:md,3]<-fd3#[st:md] no caso normal é necessário que assim seja
  if(all(lst[st:md,3]>=1)) {
    lst[1:md,8]<-cumprod(lst[1:md,3])
    lst[1:md,12]<-lst[1:md,8]/lst[md,8]*100
    legd<-cbind(legd,"logaritmico")
    co<-cbind(co,4)
  }
  #decay
  lst[st:md,4]<-fd4#[1:md]
  if(all(lst[st:md,4]>1)) {
    lst[1:md,9]<-cumprod(lst[1:md,4])
    lst[1:md,13]<-lst[1:md,9]/lst[md,9]*100
    legd<-cbind(legd,"decay")
    legd2<-cbind(legd2,"decay")
    co<-cbind(co,5)
  }
  ## graphics
  op<-par(mfrow=c(1,1),ask=TRUE)
  matplot(dpt,cbind(lst[,1][dpt],lst[,2][dpt],lst[,4][dpt],lst[,5][dpt]),col=1,pch=c(1,co),xlab="período de
desenvolvimento", ylab="factores de desenvolvimento")

```

```

#para cores diferentes: matplot(dpt,cbind(lst[,1][dpt],lst[,2][dpt],lst[,4][dpt],lst[,5]
[dpt]),col=c(1,co),pch=c(1,co),xlab="período de desenvolvimento", ylab="factores de desenvolvimento")
#matplot(dpt,cbind(lst[,1][dpt],lst[,2][dpt],lst[,3][dpt],lst[,4][dpt],lst[,5]
[dpt]),col=c(co,1),pch=c(co,1),xlab="período de desenvolvimento", ylab="factores de desenvolvimento")
abline(h=1,col="lightgray", lty=3)
title(main="Factores de desenvolvimento")
#legend("topright",c(legd,"Dev factors"), col=c(co,1), pch=c(co,1),bty='n')#c("inverse
power","exponencial","logaritmica", "model fd")
legend("topright",c(legd2,"Dev factors"), col=1, pch=c(co,1),bty='n')#c("inverse
power","exponencial","logaritmica", "model fd")

#matplot(1:md,cbind(lst[,10][1:md],lst[,11][1:md],lst[,12][1:md],lst[,13]
[1:md]),col=co,type='b',pch=co,xlab="período de desenvolvimento", ylab="%")
matplot(1:md,cbind(lst[,10][1:md],lst[,11][1:md],lst[,13][1:md]),col=1,type='b',pch=co,xlab="período
de desenvolvimento", ylab="%")
#para cores diferentes: matplot(1:md,cbind(lst[,10][1:md],lst[,11][1:md],lst[,13]
[1:md]),col=co,type='b',pch=co,xlab="período de desenvolvimento", ylab="%")
abline(h=100,col="lightgray", lty=3)
title(main="Factores de desenvolvimento acumulados")
#legend("bottomright",legd, col=co, pch=co,bty='n')
legend("bottomright",legd2, col=1, pch=co,bty='n')
par(op)
lst<-lst[,1:5]
colnames(lst)<-c("IC","Exp","Log","Decay","CL")
lst
}
##usage:
#input: fd0->development factors (CL or other) from de original data
#   fd1->adjusted inverse curve development factors
#   fd2->adjusted exponencial development factors
#   fd3->adjusted logaritmica development factors
#   fCL.fdd4->adjusted decay development factors
#   st->adjustment starting point(>=2)
#   md->maximum development periods (includes existing development periods)
#output: graphics
#example: graph.tail(fd,fd.ic,fd.exp,fd.log,fd.decay,start,tail.s)

```

BIBLIOGRAFIA

- BERQUIST, J. R. E SHERMAN, R. E. (1977), LOSS RESERVE ADEQUACY TESTING: A COMPREHENSIVE SYSTEMATIC APPROACH. *PROCEEDINGS OF CAS*, Vol **LXVII**, 123-184.
- DAVISON, A. C., HINKLEY, D. V.(1999), *BOOTSTRAP METHODS AND THEIR APPLICATION*, CAMBRIDGE SERIES IN STATISTICAL AND PROBABILISTIC MATHEMATICS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- DE ALBA, E. (2002), CLAIMS RESERVING WHEN THERE ARE NEGATIVE VALUES IN THE DEVELOPMENT TRIANGLE, 37 TH. *ACTUARIAL RESEARCH CONFERENCE*, THE UNIVERSITY OF WATERLOO, ARCH 2003 PROCEEDINGS, THE SOCIETY OF ACTUARIES.
- DE ALBA, E. (2006), CLAIMS RESERVING WHEN THERE ARE NEGATIVE VALUES IN THE RUNOFF TRIANGLE: BAYESIAN ANALYSIS USING THE THREE-PARAMETER LOG-NORMAL DISTRIBUTION. *NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL*, Vol **10**, No 3, 45-59.
- DE ALBA, E. E BONNILLA, R. (2002), UN MODELO PARA EL TRATAMIENTO DE VALORES NEGATIVOS EN EL TRIANGULO DE DESARROLLO UTILIZADO EN LA ESTIMACIÓN DE RESERVAS PARA SONR, *TRANSACTIONS 27TH INTERNATIONAL CONGRESS OF ACTUARIES*, CANCÚN, MEXICO.
- EFRON, B. E TIBSHIRANI, R. J.(1998), *AN INTRODUCTION TO THE BOOTSTRAP*, , CHAPMAN & HALL / CRC.
- ENGLAND, P. D. (2002), ADDENDUM TO "ANALYTIC AND BOOTSTRAP ESTIMATES OF PREDICTION ERRORS IN CLAIMS RESERVING". *INSURANCE: MATHEMATICS AND ECONOMICS*, Vol **31**, No 3, 461-466.
- ENGLAND, P. D. E VERRALL, R. J. (1999), ANALYTIC AND BOOTSTRAP ESTIMATES OF PREDICTION ERRORS IN CLAIM RESERVING. *INSURANCE: MATHEMATICS AND ECONOMICS*, Vol **25**, 281-293.
- ENGLAND, P. D. E VERRALL, R. J. (2002), STOCHASTIC CLAIMS RESERVING IN GENERAL INSURANCE WITH DISCUSSION. *BRITISH ACTUARIAL JOURNAL*, Vol **III**, No 8, 443-544.
- ENGLAND, P. D. E VERRALL, R. J. (2006), PREDICTIVE DISTRIBUTIONS OF OUTSTANDING LIABILITIES IN GENERAL INSURANCE. *ANNALS OF ACTUARIAL SCIENCE*, Vol **1**, No 2, 221-270.
- GHEZZI, THOMAS L. (2001), LOSS RESERVING WITHOUT LOSS DEVELOPMENT PATTERNS - BEYOND BERQUIST-SHERMAN. *CAS FORUM*, **FALL**, 43-104.
- MACK, T. (1993), DISTRIBUTION-FREE CALCULATION OF THE STANDARD ERROR OF CHAIN LADDER RESERVE ESTIMATES. *ASTIN BULLETIN*, Vol **23**, No 2.
- MACK, T. (1999), THE STANDARD ERROR OF CHAIN LADDER RESERVE ESTIMATES: RECURSIVE CALCULATION AND INCLUSION OF A TAIL FACTOR. *ASTIN BULLETIN*, Vol **29**, No 2, 361-366.

- McCULLAGH, P. E NELDER, J.A.(1989), *GENERALIZED LINEAR MODELS*, 2ND EDITION, CHAPMAN AND HALL, LONDON.
- MURATORI, G. A. (2007), *MODELAGEM ACTUARIAL EM PROVISÕES PARA SINISTROS*, INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA.
- PINHEIRO, P. J. R., ANDRADE E SILVA, J. M., CENTENO, M. L. C. (2003), BOOTSTRAP METHODOLOGY IN CLAIM RESERVING. *THE JOURNAL OF RISK AND INSURANCE*, VOL 70, No 4, 701-714.
- RENSHAW, A. E. E VERRALL, R. J. (1998), A STOCHASTIC MODEL UNDERLYING THE CHAIN LADDER TECHNIQUE. *BRITISH ACTUARIAL JOURNAL*, VOL 4, No 4, 903-923.
- SCOLLNIK, D. P. M. (2001), ACTUARIAL MODELING WITH MCMC AND BUGS. *NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL*, VOL 5, No 2, 96-124.
- SCOLLNIK, D. P. M. (2005), DISCUSSION OF PAPERS ALREADY PUBLISHED "A BAYESIAN GENERALIZED LINEAR MODEL FOR THE BORNHUETTER-FERGUSON METHOD OF CLAIMS RESERVING", R.J. VERRALL, JULY 2004. *NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL*, VOL 9, No 3, 146-149.
- SHERMAN, R. E. (1984), EXTRAPOLATING, SMOOTHING, AND INTERPOLATING DEVELOPMENT FACTORS. *PROCEEDINGS CAS*, VOL LXXI, 122-155.
- TURKMAN, M. A. A. E SILVA, G.(2000), *MODELOS LINEARES GENERALIZADOS - DA TEORIA À PRÁTICA*, VII CONGRESSO ANUAL DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE ESTATÍSTICA.
- VERRALL, R. J. (2004), A BAYESIAN GENERALIZED LINEAR MODEL FOR THE BORNHUETTER-FERGUSON METHOD OF CLAIMS RESERVING. *NORTH AMERICAN ACTUARIAL JOURNAL*, VOL 8, No 3, 67-89.
- VERRALL, R. J. E ENGLAND, P. D. (2005), INCORPORATING EXPERT OPINION INTO A STOCHASTIC MODEL FOR THE CHAIN-LADDER TECHNIQUE. *INSURANCE: MATHEMATICS AND ECONOMICS*, VOL 37, No 2, 355-370.
- WALSH, B.(2004), *MARKOV CHAIN MONTE CARLO AND GIBBS SAMPLING*, LECTURE NOTES FOR EEB 581, VERSION 26, APRIL 2004.